

# Modos de vibración traslacional de un edificio mediante métodos iterativos y verificación con uso de softwares Mathcad y Etabs

*Translational vibration modes of a building through iterative methods and verification using Mathcad and Etabs software*

*Modos de vibração translacional de uma edificação através de métodos iterativos e verificação utilizando os softwares Mathcad e Etabs*

Marcos Josue Rupay Vargas<sup>1</sup> (\*), Regner Raúl Parra Lavado<sup>2</sup>,  
Juan Percy Espejo Castilla<sup>3</sup>, Juan Miguel Quispe Llantay<sup>4</sup>

Recibido: 15/03/2024

Aceptado: 09/04/2024

**Resumen.** - Esta investigación se centra en calcular los modos de vibración traslacional de un edificio de pórticos de tres niveles, con el fin de determinar sus periodos y forma de vibrar, la evaluación se llevó a cabo mediante métodos interactivos de Stodola y Holzer, el método numérico de Jacobi, y los resultados obtenidos se verificaron utilizando funciones del vector eigenvals y matriz eigenvecs del software Mathcad, Además, se realizó una verificación con un modelamiento en el software Etabs, siguiendo las propiedades establecidas por la Norma Técnica E.030 de Diseño Sismorresistente del Reglamento Nacional de Edificaciones (RNE).

A lo largo de la investigación, se obtuvieron resultados precisos por medio de los cálculos manuales como con las verificaciones con el uso de los softwares Mathcaf y ETABS. En cada instancia, se determinó que estos métodos representan la vía más apropiada para obtener valores aproximados con respecto a la verificación realizada con su periodo y forma de vibrar. Estos resultados confiables subrayan la eficacia de las herramientas y métodos empleados, destacando la comprensión profunda de las características dinámicas de la edificación analizada.

**Palabras clave:** Modos de vibración; Método de Stodola; Método de Holzer; Método de Jacobi; Función Eigenvals y Eigenvecs.

---

(\*) Autor Corresponsal

<sup>1</sup> Doctorado en Ingeniería Civil. Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central “Juan Santos Atahualpa” (Perú), mrupay@uniscjsa.edu.pe, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7891-1838>

<sup>2</sup> Maestro en Ingeniería Civil. Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central “Juan Santos Atahualpa” (Perú), rparra@uniscjsa.edu.pe, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3564-4637>

<sup>3</sup> Estudiante de Ingeniería Civil. Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central “Juan Santos Atahualpa” (Perú), 77023708@uniscjsa.edu.pe, ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0008-8494-9278>

<sup>4</sup> Estudiante de Ingeniería Civil. Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central “Juan Santos Atahualpa” (Perú), 73383929@uniscjsa.edu.pe, ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0000-7813-5712>

**Summary.** - This research focuses on calculating the translational vibration modes of a three-level frame building, in order to determine its periods and way of vibrating, the evaluation was carried out using interactive methods of Stodola and Holzer, the numerical method of Jacobi, and the results obtained were verified using functions of the eigenvals vector and eigenvecs matrix of the Mathcad software. In addition, a verification was carried out with modeling in the Etabs software, following the properties established by the Technical Standard E.030 for Seismic-Resistant Design of the Reglamento Nacional de Edificaciones (RNE).

Throughout the investigation, accurate results were obtained through manual calculations as well as verifications with the use of Mathcaf and ETABS software. In each instance, it was determined that these methods represent the most appropriate way to obtain approximate values with respect to the verification carried out with its period and way of vibrating. These reliable results underline the effectiveness of the tools and methods used, highlighting the deep understanding of the dynamic characteristics of the analyzed building.

**Keywords:** Vibration Modes; Stodola Method; Holzer Method; Jacobi Method; Function Eigenvals and Eigenvecs.

**Resumo.** - Esta pesquisa tem como foco o cálculo dos modos de vibração translacional de um edifício com pórtico de três níveis, a fim de determinar seus períodos e forma de vibrar, a avaliação foi realizada utilizando métodos interativos de Stodola e Holzer, o método numérico de Jacobi, e os resultados obtidos foram verificados utilizando funções do vetor de autovals e matriz de eigenvecs do software Mathcad. Além disso, foi realizada uma verificação com modelagem no software Etabs, seguindo as propriedades estabelecidas pela Norma Técnica E.030 para Projeto Resistente a Sísmicos do Reglamento Nacional de Edificaciones (RNE).

Ao longo da investigação, resultados precisos foram obtidos através de cálculos manuais, bem como verificações com o uso dos softwares Mathcaf e ETABS. Em cada caso, determinou-se que estes métodos representam a forma mais adequada para obter valores aproximados no que diz respeito à verificação realizada com o seu período e forma de vibração. Estes resultados fiáveis sublinham a eficácia das ferramentas e métodos utilizados, destacando a profunda compreensão das características dinâmicas do edifício analisado.

**Palavras-chave:** Modos de Vibração; Método Stodola; Método Holzer; Método Jacobi; Função Eigenvals e Eigenvecs.

**1. Introducción.** – En el ámbito de la ingeniería Antisísmica, la comprensión de los modos de vibración traslacional de edificios es esencial para garantizar su seguridad y resistencia ante cargas dinámicas, especialmente en zonas sísmicas. En este contexto, la presente investigación se centra en el análisis de un edificio aporticado de tres niveles, con el propósito fundamental de calcular sus modos de vibración traslacional, determinar sus periodos y caracterizar sus formas de vibrar.

Para alcanzar estos objetivos, se emplearán métodos iterativos bien establecidos, como el método de Stodola, el método de Holzer y el método numérico de Jacobi. La verificación de los resultados se llevará a cabo mediante el uso de las funciones del vector eigenvals y matriz eigenvecs del software Mathcad. Además, se realizará una validación adicional utilizando el software Etabs, siguiendo las normativas establecidas por la Norma Técnica E.030 de Diseño Sismorresistente del Reglamento Nacional de Edificaciones (RNE).

Esta investigación busca no solo calcular los modos de vibración, sino también demostrar la eficacia de los métodos empleados, tanto a través de cálculos manuales como del uso de herramientas computacionales avanzadas. La aplicación de estos enfoques proporcionará información valiosa para comprender las características dinámicas de la estructura analizada, contribuyendo así al avance de la ingeniería estructural y al diseño sismorresistente de edificaciones.

**2. Materiales y métodos.** – Nos enfocamos en un modelo estructural conocido como "edificio simple", el cual se caracteriza por la ausencia de rotaciones en los elementos horizontales a nivel de los pisos. En esta configuración, el edificio simple, cuando se ve sometido a excitaciones que provocan desplazamientos horizontales, comparte numerosas similitudes con una viga en voladizo deformada únicamente por esfuerzo cortante. Para obtener esta deformación, es necesario aceptar las siguientes premisas: la masa de la estructura se concentra por completo en el nivel de los pisos, y las vigas en cada piso son considerablemente más rígidas que las columnas. Esta primera premisa simplifica el problema al convertir un sistema con un número infinito de grados de libertad (GDL) en uno con tantos GDL como masas concentradas a nivel de los pisos.

Los modos de vibración de la edificación, junto con sus frecuencias, periodos y formas de vibración, se calcularán mediante el método iterativo de Stodola y de Holzer, el método numérico de Jacobi, y se verificarán utilizando las funciones del vector eigenvals y matriz eigenvecs del software Mathcad. Además, se realizará una verificación adicional mediante el software Etabs.

La figura I ilustra la configuración de un edificio simple de 3 niveles con un eje de simetría. En donde el módulo de elasticidad del concreto (E) es de  $2.20 \times 10^6$  tonf/m<sup>2</sup>. Las cargas de los dos primeros niveles y de la azotea son de 1.20 y 0.80 tonf/m<sup>2</sup>, respectivamente. Las dimensiones de las columnas varían entre 40 x 40 y 40 x 60 cm según el plano en planta. Dada la rigidez significativa de las vigas, se asume un modelo de corte. La aceleración de la gravedad se establece en 9.81 m/s<sup>2</sup>.

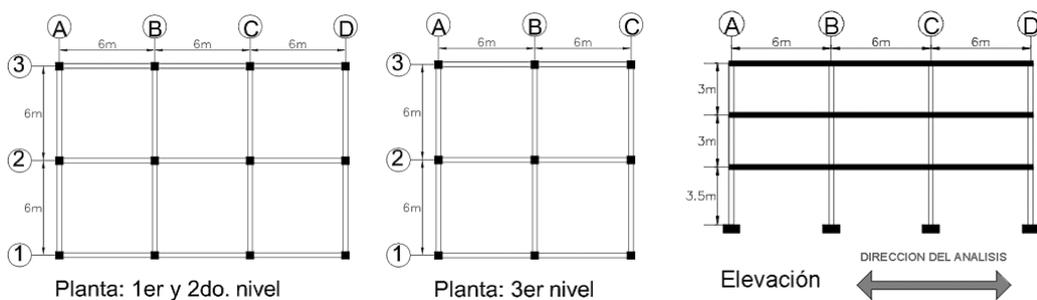


Figura I.- Edificio simple de tres niveles con un eje de simetría

El proceso para cada uno de los métodos comienza con la obtención de la matriz de rigidez lateral y la matriz de masa.

- **Matriz de rigidez lateral.** - Para simplificar el cálculo de modos traslacionales, se emplea un modelo de corte. Sin embargo, es crucial recordar que esto implica una simplificación significativa del modelo. A continuación, se detallan las rigideces de cada entrepiso, junto con la matriz de rigidez lateral.

$$I_c = \frac{b \times h^3}{12}$$

$$k_{ent} = \frac{12EI}{h_1^3}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105384.8699 & -64663.7037 & 0 \\ -64663.7037 & 113161.4815 & -48497.7778 \\ 0 & -48497.7778 & 48497.7778 \end{bmatrix}$$

- **Matriz de masa.** - La masa de cada entrepiso se obtiene multiplicando la carga por el área y dividiéndolo entre la aceleración de la gravedad.

$$M_i = \frac{P_i}{g}$$

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27.9095 & 0 & 0 \\ 0 & 27.9095 & 0 \\ 0 & 0 & 12.5390 \end{bmatrix}$$

**2.1. Método iterativo de Stodola.** – Es un método numérico para hallar la primera frecuencia y la forma de vibrar de un sistema mecánico o estructural. Consiste en suponer un vector inicial de desplazamientos y aplicar una serie de operaciones matriciales para obtener un vector mejorado, que se acerca al modo de vibración buscado [4].

- **Primer modo de vibración** :

Matriz dinámica :  $D_1 = K^{-1} \times M = \begin{bmatrix} 0.6854 & 0.6854 & 0.3079 \\ 0.6854 & 1.1170 & 0.5018 \\ 0.6854 & 1.1170 & 0.7604 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$

Forma de vibrar asumida :  $\phi_{asumida} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.7 \\ 1 \end{bmatrix}$

Primera iteración :  $\phi'_1 = D_1 \times \phi_{asumida} = \begin{bmatrix} 0.001062 \\ 0.001558 \\ 0.001816 \end{bmatrix}$

Forma normalizanda :  $\phi_1 = \frac{\phi'_1}{\phi'_{13}} = \begin{bmatrix} 0.584577 \\ 0.857661 \\ 1 \end{bmatrix}$

Segunda iteración :  $\phi'_1 = D_1 \times \phi_1 = \begin{bmatrix} 0.001296 \\ 0.001860 \\ 0.002119 \end{bmatrix} \rightarrow \phi_1 = \frac{\phi'_1}{\phi'_{13}} = \begin{bmatrix} 0.61179 \\ 0.87799 \\ 1 \end{bmatrix}$

Seguimos iterando hasta que las variaciones entre las formas normalizadas seguidas sean las mismas.

Última iteración :  $\phi'_1 = D_1 \times \phi_1 = \begin{bmatrix} 0.001333 \\ 0.001907 \\ 0.002166 \end{bmatrix} \rightarrow \phi_1 = \frac{\phi'_1}{\phi'_{13}} = \begin{bmatrix} 0.6156 \\ 0.8806 \\ 1 \end{bmatrix}$

Frecuencia y periodo :  $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\phi'_{13}}} = 21.4869 \text{ rad/s} \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.2924 \text{ s}$

- **Segundo modo de vibración** :

Matriz identidad :  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Masa generalizada :  $M^* = \phi_1^T \times M \times \phi_1 = 44.760694$

Matriz de barrido :  $\beta = I - \frac{\phi_1 \times \phi_1^T \times M}{M^*} = \begin{bmatrix} 0.7637 & -0.3380 & -0.1725 \\ -0.3380 & 0.5164 & -0.2467 \\ -0.3839 & -0.5491 & 0.7199 \end{bmatrix}$

Matriz dinámica :  $D_2 = D_1 \times \beta = \begin{bmatrix} 1.735 & -0.468 & -0.656 \\ -0.468 & 0.696 & -0.325 \\ -1.460 & -0.723 & 1.536 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$

Primera iteración :  $\phi'_2 = D_2 \times \phi_{asumida} = \begin{bmatrix} -2.896 \times 10^{-5} \\ -2.4859 \times 10^{-6} \\ 4.45579 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$

Forma normalizanda :  $\phi_2 = \frac{\phi'_2}{\phi'_{23}} = \begin{bmatrix} -0.650015 \\ -0.055767 \\ 1 \end{bmatrix}$

Seguimos iterando hasta que las variaciones entre las formas normalizadas seguidas sean las mismas.

Última iteración :  $\phi'_2 = D_2 \times \phi_2 = \begin{bmatrix} -0.000196 \\ 0.000003 \\ 0.000262 \end{bmatrix} \rightarrow \phi_2 = \frac{\phi'_2}{\phi'_{23}} = \begin{bmatrix} -0.7486 \\ 0.0132 \\ 1 \end{bmatrix}$

Frecuencia y periodo :  $\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\phi'_{23}}} = 61.7799 \text{ rad/s} \rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0.1017 \text{ s}$

• **Tercer modo de vibración** :

Matriz inversa dinámica :  $D_3 = M^{-1} \times K = \begin{bmatrix} 3775.95 & -2316.91 & 0 \\ -2316.91 & 4054.59 & -1737.68 \\ 0 & -3867.74 & 3867.74 \end{bmatrix}$

Primera iteración :  $\phi'_3 = D_3 \times \phi_{asumida} = \begin{bmatrix} -111.4548 \\ 173.7681 \\ 1160.3226 \end{bmatrix}$

Forma normalizanda :  $\phi_3 = \frac{\phi'_3}{\phi'_{33}} = \begin{bmatrix} -0.096055 \\ 0.149758 \\ 1 \end{bmatrix}$

Seguimos iterando hasta que las variaciones entre las formas normalizadas seguidas sean las mismas.

Última iteración :  $\phi'_3 = D_3 \times \phi_3 = \begin{bmatrix} 4332.776 \\ -6814.330 \\ 7419.846 \end{bmatrix} \rightarrow \phi_3 = \frac{\phi'_3}{\phi'_{33}} = \begin{bmatrix} 0.5839 \\ -0.9184 \\ 1 \end{bmatrix}$

Frecuencia y periodo :  $\omega_3 = \sqrt{\phi'_{33}} = 86.1385 \text{ rad/s} \rightarrow T_3 = \frac{2\pi}{\omega} = 0.0729 \text{ s}$

**2.2. Método iterativo de Holzer.** – Se fundamenta en la repetición de un conjunto de expresiones matriciales que detallan la evolución dinámica del sistema [3].

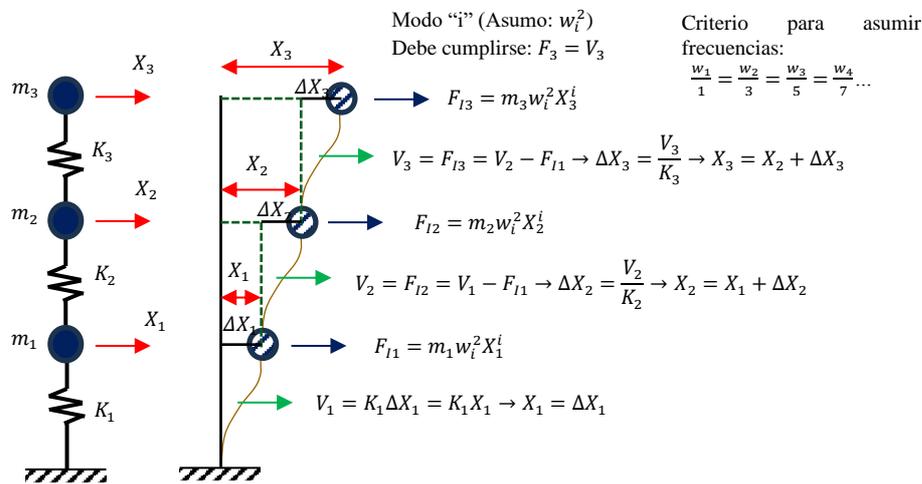


Figura I.- Esquema del método de Holzer

• **Primer modo de vibración** :

Frecuencia circular y periodo :  $\omega_1 = 21.4869 \text{ rad/s} \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.2924 \text{ s}$

Nivel 1 :  $X_1 = \Delta X_1 = 1 \rightarrow V_1 = k_1 \times \Delta X_1 = 40721.1662$   
:  $F_1 = M_1 \times X_1 \times \omega_1^2 = 12885.3923$

Nivel 2 :  $V_2 = V_1 - F_1 = 27835.7739$   
:  $\Delta X_2 = \frac{V_2}{k_2} = 0.4305 \rightarrow X_2 = X_1 + \Delta X_2 = 1.4305$   
:  $F_2 = M_2 \times X_2 \times \omega_1^2 = 18432.1650$

Nivel 3 :  $V_3 = V_2 - F_2 = 9403.6089$   
:  $\Delta X_3 = \frac{V_3}{k_3} = 0.1939 \rightarrow X_3 = X_2 + \Delta X_3 = 1.6244$   
:  $F_3 = M_3 \times X_3 \times \omega_1^2 = 9403.6089 \rightarrow V_3 - F_3 = 0$

Forma normlizada :  $D_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.4305 \\ 1.6244 \end{bmatrix} \rightarrow \phi_1 = \frac{D_1}{D_{13}} = \begin{bmatrix} 0.6156 \\ 0.8806 \\ 1 \end{bmatrix}$

• **Segundo modo de vibración** :

Frecuencia circular y periodo :  $\omega_2 = 61.7799 \text{ rad/s} \rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0.1017 \text{ s}$

Nivel 1 :  $X_1 = \Delta X_1 = 1 \rightarrow V_1 = k_1 \times \Delta X_1 = 40721.1662$   
:  $F_1 = M_1 \times X_1 \times \omega_2^2 = 106523.5692$

Nivel 2 :  $V_2 = V_1 - F_1 = -65802.4030$   
 :  $\Delta X_2 = \frac{V_2}{k_2} = -1.0176 \rightarrow X_2 = X_1 + \Delta X_2 = -0.0176$   
 :  $F_2 = M_2 \times X_2 \times w_2^2 = -1875.8331$

Nivel 3 :  $V_3 = V_2 - F_2 = -63926.5699$   
 :  $\Delta X_3 = \frac{V_3}{k_3} = -1.3181 \rightarrow X_3 = X_2 + \Delta X_3 = -1.3357$   
 :  $F_3 = M_3 \times X_3 \times w_3^2 = -63926.5699 \rightarrow V_3 - F_3 = 0$

Forma normlizada :  $D_2 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.0176 \\ -1.3357 \end{bmatrix} \rightarrow \phi_2 = \frac{D_2}{D_{23}} = \begin{bmatrix} -0.7486 \\ 0.0132 \\ 1 \end{bmatrix}$

• **Tercer modo de vibración** :

Frecuencia circular y periodo :  $\omega_3 = 86.1385 \text{ rad/s} \rightarrow T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = 0.0729 \text{ s}$

Nivel 1 :  $X_1 = \Delta X_1 = 1 \rightarrow V_1 = k_1 \times \Delta X_1 = 40721.1662$   
 :  $F_1 = M_1 \times X_1 \times w_3^2 = 207084.0565$

Nivel 2 :  $V_2 = V_1 - F_1 = -166362.8903$   
 :  $\Delta X_2 = \frac{V_2}{k_2} = -2.5727 \rightarrow X_2 = X_1 + \Delta X_2 = -1.5727$   
 :  $F_2 = M_2 \times X_2 \times w_3^2 = -325689.3574$

Nivel 3 :  $V_3 = V_2 - F_2 = 159326.4671$   
 :  $\Delta X_3 = \frac{V_3}{k_3} = 3.2852 \rightarrow X_3 = X_2 + \Delta X_3 = 1.7125$   
 :  $F_3 = M_3 \times X_3 \times w_3^2 = 159326.4671 \rightarrow V_3 - F_3 = 0$

Forma normlizada :  $D_3 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5727 \\ 1.7125 \end{bmatrix} \rightarrow \phi_3 = \frac{D_3}{D_{33}} = \begin{bmatrix} 0.5839 \\ -0.9184 \\ 1 \end{bmatrix}$

**2.3. Método numérico de Jacobi.** – Se fundamenta en la repetición de un conjunto de expresiones en forma de matrices que detallan la dinámica del sistema a lo largo del tiempo [1].

Matriz diagonal inferior :  $L = \sqrt{M} = \begin{bmatrix} 5.2829 & 0 & 0 \\ 0 & 5.2829 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5411 \end{bmatrix}$

Matriz dinámica :  $D = L^{-1} \times K \times (L^{-1})^T$   
 $D = \begin{bmatrix} 3775.9525 & -2316.9082 & 0 \\ -2316.9082 & 4054.5894 & -2592.4703 \\ 0 & -2592.4703 & 3867.7419 \end{bmatrix}$

Ciclos de rotación :  $\{1, 2, 3\} = p, q \{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \}$

• **Primera iteración** :  $Tan(2\theta) = \frac{2D_{(p,q)}}{(D_{(p,p)} - D_{(q,q)})} \rightarrow \theta = 0.5 ArcTan \left( \frac{2D_{(p,q)}}{(D_{(p,p)} - D_{(q,q)})} \right)$   
 $D_n = (R_n)^T \times D_{n-1} \times R_n$

1ra rotación : eliminando el término,  $d_{1,2} (p = 1, q = 2)$   
 :  $\theta_1 = 0.5 ArcTan \left( \frac{2D_{(1,2)}}{(D_{(1,1)} - D_{(2,2)})} \right) = 0.7554$   
 :  $R_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -sen \theta_1 & 0 \\ sen \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7280 & -0.6856 & 0 \\ 0.6856 & 0.7280 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$   
 :  $D_1 = (R_1)^T \times D \times R_1 = \begin{bmatrix} 1594.178 & 0 & -1777.287 \\ 0 & 6236.364 & -1887.367 \\ -1777.287 & -1887.367 & 3867.742 \end{bmatrix}$

2da rotación :  $d_{1,3} (p = 1, q = 3)$   
 :  $\theta_2 = 0.5 ArcTan \left( \frac{2D_{(1,3)}}{(D_{(1,1)} - D_{(3,3)})} \right) = 0.5009$   
 :  $R_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -sen \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ sen \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8772 & 0 & -0.4802 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.4802 & 0 & 0.8772 \end{bmatrix}$   
 :  $D_2 = (R_2)^T \times D_1 \times R_2 = \begin{bmatrix} 621.216 & -906.305 & 0 \\ -906.305 & 6236.364 & -1655.526 \\ 0 & -1655.526 & 4840.704 \end{bmatrix}$

3ra rotación

$$\begin{aligned}
 & : d_{3,2} (p = 2, q = 3) \\
 & : \theta_3 = 0.5 \text{ArcTan} \left( \frac{2D_{(2,3)}}{(D_{(3,3)} - D_{(2,2)})} \right) = 0.5859 \\
 & : R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_3) & \text{sen}(\theta_3) \\ 0 & -\text{sen}(\theta_3) & \cos(\theta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8332 & 0.5530 \\ 0 & -0.5530 & 0.8332 \end{bmatrix} \\
 & : D_3 = (R_3)^T \times D_2 \times R_3 = \begin{bmatrix} 621.216 & -755.127 & -501.171 \\ -755.127 & 7335.123 & 0 \\ -501.171 & 0 & 3741.945 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

• **Segunda iteración**

: se realiza el mismo proceso que en la 1ra iteración.

$$\begin{aligned}
 D_4 & = \begin{bmatrix} 537.333 & 0 & -498.108 \\ 0 & 7419.006 & 55.332 \\ -498.108 & 55.332 & 3741.945 \end{bmatrix}; D_5 = \begin{bmatrix} 461.695 & 8.307 & 0 \\ 8.307 & 7419.006 & 54.705 \\ 0 & 54.705 & 3817.583 \end{bmatrix}; \\
 D_6 & = \begin{bmatrix} 461.695 & 8.306 & -0.126 \\ 8.306 & 7419.837 & 0 \\ -0.126 & 0 & 3816.752 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

• **Tercera iteración**

: se realiza el mismo proceso que en la 1ra iteración.

$$\begin{aligned}
 D_7 & = \begin{bmatrix} 461.685 & 0 & -0.126 \\ 0 & 7419.846 & 55.332 \\ -0.126 & 55.332 & 3816.752 \end{bmatrix}; D_8 = \begin{bmatrix} 461.685 & 0 & 0 \\ 0 & 7419.846 & 0 \\ 0 & 0 & 3816.752 \end{bmatrix}; \\
 D_9 & = \begin{bmatrix} 461.685 & 0 & 0 \\ 0 & 7419.846 & 0 \\ 0 & 0 & 3816.752 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Se realizará el número de iteración que sea conveniente a fin de que todos los datos de la matriz sean proximos a cero con excepción de los valores de la diagonal principal.

Frecuencias y periodos:

$$\begin{aligned}
 & : w_1 = \sqrt{D_{6(1,1)}} = 21.4869 \text{ rad/s} \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{w_1} = 0.2924 \text{ s} \\
 & : w_3 = \sqrt{D_{6(2,2)}} = 86.1385 \text{ rad/s} \rightarrow T_3 = \frac{2\pi}{w_2} = 0.0729 \text{ s} \\
 & : w_2 = \sqrt{D_{6(3,3)}} = 61.7799 \text{ rad/s} \rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{w_3} = 0.1017 \text{ s}
 \end{aligned}$$

• **Formas de vibración**

:  $U = R_1 \times R_2 \times R_3 \times R_4 \times R_5 \times R_6 \times R_7 \times R_8 \times R_9$

$$U = \begin{bmatrix} 0.4861 & -0.4569 & -0.7450 \\ 0.6954 & 0.7185 & 0.0131 \\ 0.5293 & -0.5244 & 0.6670 \end{bmatrix}$$

:  $D = (L^{-1})^T \times U = \begin{bmatrix} 0.0920 & -0.0865 & -0.1410 \\ 0.1316 & 0.1360 & 0.0025 \\ 0.1495 & -0.1481 & 0.1884 \end{bmatrix}$

• **Formas de vibración normalizado:**

$$\begin{aligned}
 & : d_1 = \begin{bmatrix} 0.0920 \\ 0.1316 \\ 0.1495 \end{bmatrix} \rightarrow \phi_1 = \frac{d_1}{d_{13}} = \begin{bmatrix} 0.6156 \\ 0.8806 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 & : d_3 = \begin{bmatrix} -0.0865 \\ 0.1360 \\ -0.1481 \end{bmatrix} \rightarrow \phi_3 = \frac{d_3}{d_{33}} = \begin{bmatrix} 0.5839 \\ -0.9184 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 & : d_2 = \begin{bmatrix} -0.1410 \\ 0.0025 \\ 0.1884 \end{bmatrix} \rightarrow \phi_2 = \frac{d_2}{d_{23}} = \begin{bmatrix} -0.7486 \\ 0.0132 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

**2.4. Empleando la función del vector eigenvals y matriz eigenvecs del software Mathcad.** – El software Mathcad tiene funciones integradas para calcular los valores y vectores propios de una matriz, que son eigenvals y eigenvecs, respectivamente. Estas funciones devuelven un vector con los valores propios y una matriz con los vectores propios, ordenados de menor a mayor [2].

Matriz dinámica :  $A = K^{-1} \times M = \begin{bmatrix} 0.6854 & 0.6854 & 0.3079 \\ 0.6854 & 1.1170 & 0.5018 \\ 0.6854 & 1.1170 & 0.7604 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$

Función del vector eigenvals :  $\delta = \text{eigenvals}(A) = \begin{bmatrix} 0.002166 \\ 0.000262 \\ 0.000135 \end{bmatrix}$

Frecuencias y periodos :  $\lambda = \frac{1}{\delta} \rightarrow w = \sqrt{\lambda} = \begin{bmatrix} 21.4869 \\ 61.7799 \\ 86.1385 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{w} = \begin{bmatrix} 0.2924 \\ 0.1017 \\ 0.0729 \end{bmatrix} \text{s}$

Función de la matriz eigenvecs :  $\phi' = \text{eigenvecs}(A) = \begin{bmatrix} -0.4194 & -0.5993 & 0.3951 \\ -0.6000 & 0.0106 & -0.6214 \\ -0.6813 & 0.8005 & 0.6766 \end{bmatrix}$

Formas de vibración normalizado:

$$\begin{aligned} \phi'_1 &= \begin{bmatrix} -0.4194 \\ -0.6000 \\ -0.6813 \end{bmatrix} \rightarrow \phi_1 = \frac{\phi'_1}{\phi'_{13}} = \begin{bmatrix} 0.6156 \\ 0.8806 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \phi'_2 &= \begin{bmatrix} -0.5993 \\ 0.0106 \\ 0.8005 \end{bmatrix} \rightarrow \phi_2 = \frac{\phi'_2}{\phi'_{23}} = \begin{bmatrix} -0.7486 \\ 0.0132 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \phi'_3 &= \begin{bmatrix} 0.3951 \\ -0.6214 \\ 0.6766 \end{bmatrix} \rightarrow \phi_3 = \frac{\phi'_3}{\phi'_{33}} = \begin{bmatrix} 0.5839 \\ -0.9184 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**2.5. Empleando el Software Etabs.** – La determinación de los modos de vibración implica un análisis que cuidadosamente tiene en cuenta las características de rigidez y la distribución de masas en la estructura.

En cada dirección de análisis, se seleccionan los modos de vibración cuya suma de masas efectivas represente al menos el 90% de la masa total. Se da prioridad a los tres primeros modos predominantes en la dirección de análisis, asegurando así una representación significativa de la respuesta dinámica de la estructura.

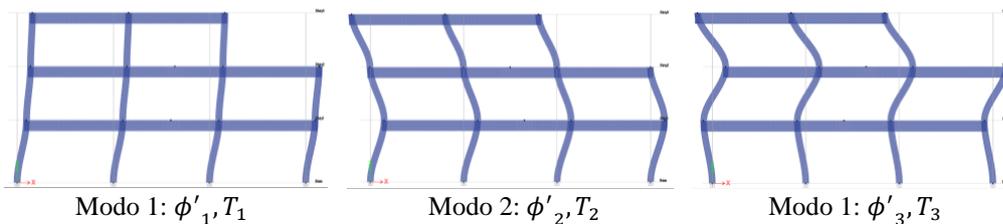


Figura I.- Modos de vibración traslacional de un edificio de 3 niveles

- **Periodos de vibración** :  $T_1 = 0.2924 \text{ s}$   $T_2 = 0.1017 \text{ s}$   $T_3 = 0.0729 \text{ s}$

Case	Mode	Period sec	UX	UY	UZ	SumUX	SumUY	SumUZ	RX	RY	RZ	SumRX
Modal	1	0.407089	0	0.963595	0	0	0.963595	0	0.034575	0	0.000514	0.034575
Modal	2	0.292467	0.963594	0	0	0.963594	0.963595	0	0	0.034576	0	0.034575
Modal	3	0.141588	0	0.03311	0	0.963594	0.996705	0	0.959954	0	0.024059	0.994529
Modal	4	0.10172	0.033111	0	0	0.996705	0.996705	0	0	0.959952	0	0.994529
Modal	5	0.101549	0	0.003295	0	0.996705	1	0	0.005471	0	0.010832	1
Modal	6	0.072955	0.003295	0	0	1	1	0	0	0.005472	0	1
Modal	7	7.6E-05	0	0	0	1	1	0	0	0	0.915637	1
Modal	8	2.7E-05	0	0	0	1	1	0	0	0	0.047118	1
Modal	9	2E-05	0	0	0	1	1	0	0	0	0.001842	1

Figura I.- Periodos de vibración de un edificio de 3 niveles

- **Formas de vibración:**

Story	Diaphragm	Output Case	Case Type	Step Type	Step Number	UX mm	UY mm	RZ rad	Point	X mm	Y mm	Z mm
Story3	D3	Modal	LinModEigen	Mode	2	0.047722	0	0	1	6000	6000	9500
Story2	D2	Modal	LinModEigen	Mode	2	0.042025	0	0	2	9000	6000	6500
Story1	D1	Modal	LinModEigen	Mode	2	0.029379	0	0	3	9000	6000	3500

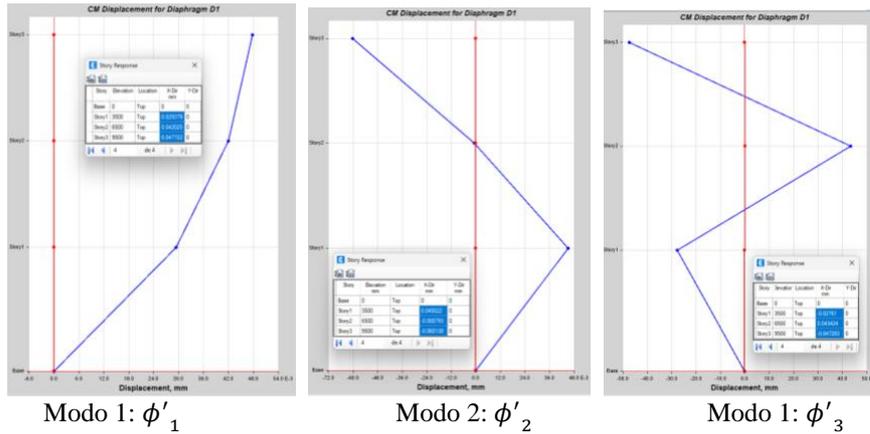
Figura I.- Primera forma de vibrar de un edificio de 3 niveles

Story	Diaphragm	Output Case	Case Type	Step Type	Step Number	UX mm	UY mm	RZ rad	Point	X mm	Y mm	Z mm
Story3	D3	Modal	LinModEigen	Mode	4	-0.060138	0	0	1	6000	6000	9500
Story2	D2	Modal	LinModEigen	Mode	4	-0.000793	0	0	2	9000	6000	6500
Story1	D1	Modal	LinModEigen	Mode	4	0.045022	0	0	3	9000	6000	3500

Figura I.- Segunda forma de vibrar de un edificio de 3 niveles

Story	Diaphragm	Output Case	Case Type	Step Type	Step Number	UX mm	UY mm	RZ rad	Point	X mm	Y mm	Z mm
Story3	D3	Modal	LinModEigen	Mode	6	-0.047283	0	0	1	6000	6000	9500
Story2	D2	Modal	LinModEigen	Mode	6	0.043424	0	0	2	9000	6000	6500
Story1	D1	Modal	LinModEigen	Mode	6	-0.02761	0	0	3	9000	6000	3500

Figura I.- Tercera forma de vibrar de un edificio de 3 niveles



Modo 1:  $\phi'_1$

Modo 2:  $\phi'_2$

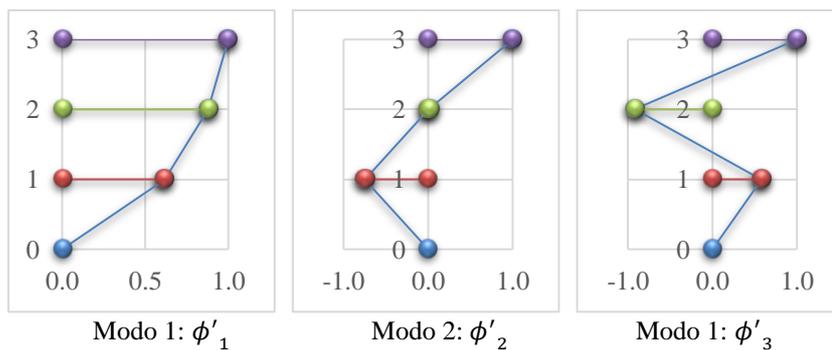
Modo 1:  $\phi'_3$

Figura I.- Formas de vibrar de un edificio de 3 niveles

$$\phi'_1 = \begin{bmatrix} 0.029379 \\ 0.042025 \\ 0.047722 \end{bmatrix} \text{ mm} \quad \phi'_2 = \begin{bmatrix} 0.045022 \\ -0.000793 \\ -0.060138 \end{bmatrix} \text{ mm} \quad \phi'_3 = \begin{bmatrix} -0.027610 \\ 0.043424 \\ -0.047283 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

- **Formas de vibrar normalizadas** : Estos valores normalizados son hallados mediante la division del ultimo valor sobre si mismo, ya que se asume que el ultimo valor que puede tener en la parte superior es 1.

$$\phi_1 = \frac{\phi'_1}{\phi'_{13}} = \begin{bmatrix} 0.6156 \\ 0.8806 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \phi_2 = \frac{\phi'_2}{\phi'_{23}} = \begin{bmatrix} -0.7486 \\ 0.0132 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \phi_3 = \frac{\phi'_3}{\phi'_{33}} = \begin{bmatrix} 0.5839 \\ -0.9184 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Modo 1:  $\phi'_1$

Modo 2:  $\phi'_2$

Modo 1:  $\phi'_3$

Figura I.- Formas de vibrar normalizadas de un edificio de 3 niveles

**3. Resultados.** – Los resultados se presentan en las siguientes tablas, permitiendo la comparación entre los métodos iterativos y las respuestas proporcionadas por los programas Mathcad y Etabs.

1ra forma	Método de Stodola	Método de Holzer	Método de Jacobi	Funciones de Mathcad	Etabs
$\phi_{11}$	0.6156	0.6156	0.6156	0.6156	0.6156
$\phi_{12}$	0.8806	0.8806	0.8806	0.8806	0.8806

$\phi_{13}$	1	1	1	1	1
-------------	---	---	---	---	---

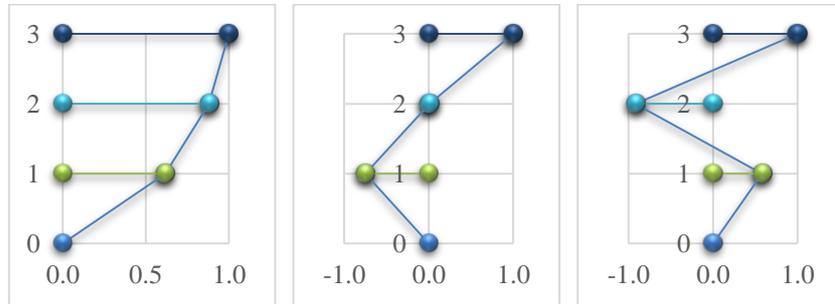
Tabla I.- Comparación de la primera forma de vibrar normalizada

2da forma	Método de Stodola	Método de Holzer	Método de Jacobi	Funciones de Mathcad	Etabs
$\phi_{21}$	-0.7486	-0.7486	-0.7486	-0.7486	-0.7486
$\phi_{22}$	0.0132	0.0132	0.0132	0.0132	0.0132
$\phi_{23}$	1	1	1	1	1

Tabla II.- Comparación de la segunda forma de vibrar normalizada

3ra forma	Método de Stodola	Método de Holzer	Método de Jacobi	Funciones de Mathcad	Etabs
$\phi_{31}$	0.5839	0.5839	0.5839	0.5839	0.5839
$\phi_{32}$	-0.9184	-0.9184	-0.9184	-0.9184	-0.9184
$\phi_{33}$	1	1	1	1	1

Tabla III.- Comparación de la tercera forma de vibrar normalizada



Periodo	Método de Stodola	Método de Holzer	Método de Jacobi	Funciones de Mathcad	Etabs
$T_1$	0.2924	0.2924	0.2924	0.2924	0.2924
$T_2$	0.1017	0.1017	0.1017	0.1017	0.1017
$T_3$	0.0729	0.0729	0.0729	0.0729	0.0729

Tabla IV.- Comparación de los periodos de vibración

#### 4. Discusión. –

- La presente investigación se centra en el cálculo de modos de vibración traslacional de un edificio simple mediante métodos iterativos para calcular su periodo y forma de vibrar. Además, de la verificación con los softwares Mathcad y Etabs.
- En relación con lo obtenido en el Etabs, los periodos 1, 2 y 3 para la estructura son de 0.2924, 0.1017 y 0.0729 segundos, respectivamente. Todos los métodos nos entregaron valores iguales.
- En cuanto a las formas de vibrar, los valores obtenidos en cada método son iguales a los resultados del programa Etabs en una aproximación de 4 decimales.

#### 5. Conclusiones. –

- Los métodos de Stodola, Holzer, Jacobi, y Eigenvals y Eigenvecs demostraron ser efectivos en la determinación del periodo y forma de vibrar de la estructura de concreto armado de tres niveles.
- La comparación entre los resultados obtenidos manualmente y a través del software ETABS valida la precisión de los métodos empleados, lo que sugiere que son herramientas confiables para el análisis dinámico de estructuras.
- Las variaciones de los valores se deben al número de iteraciones que se realizan en cada método, siendo así el método de Stodola el que requiere de mayores iteraciones para obtener valores próximos.

## **Referencias**

- Aguilar Falconi, R. (2012). *Dinámica de estructuras con CEINCI-LAB* (2 ed.). (C. d. Científicas, Ed.)  
[https://www.researchgate.net/publication/279914782\\_Dinamica\\_de\\_Estructuras\\_con\\_CEINCI-LAB](https://www.researchgate.net/publication/279914782_Dinamica_de_Estructuras_con_CEINCI-LAB)
- [2] De Dios Ochoa, D. J., & Maldonado, H. (s.f.). *Métodos de calculo de Modos de Vibración*. Universidad Nacional De San Cristobal De Huamanga, 10. <https://es.scribd.com/document/450940362/Modos-pdf>
- [3] Muñoz Peláez, A. (2002). *Ingeniería Sismorresistente* (1 ed.). <https://www.elsolucionario.org/ingenieria-sismorresistente-alejandro-munoz-pelaez-1ra-edicion/>
- [4] Santana Tapia, R. D. (2013). *Ingeniería Antisísmica principios básicos y aplicaciones* (1 ed.). Santana Tapia, Ronald Daniel. <http://isbn.bnpgob.pe/catalogo.php?mode=detalle&nt=60371>
- [5] Zelaya Jara, V. (2011). *Análisis sísmico* (1 ed.). Zelaya Jara, Víctor Antonio. <http://isbn.bnpgob.pe/catalogo.php?mode=detalle&nt=96379>

**Nota contribución de los autores:**

1. Concepción y diseño del estudio
2. Adquisición de datos
3. Análisis de datos
4. Discusión de los resultados
5. Redacción del manuscrito
6. Aprobación de la versión final del manuscrito

MJRV ha contribuido en: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

RRPL ha contribuido en: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

JPEC ha contribuido en: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

JMQL ha contribuido en: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

**Nota de aceptación:** Este artículo fue aprobado por los editores de la revista Dr. Rafael Sotelo y Mag. Ing. Fernando A. Hernández Goberti.