

Presoflexión Cilíndrica de Losas Teoría de Segundo Orden Método: Matrices de Transferencia

Introducción: El método de las matrices de transferencia, es una poderosa herramienta del análisis estructural, que por su sencillez y exactitud resulta particularmente atractiva para la programación en ordenadores personales. Estructuras tales como vigas simples, continuas y sobre fundación elástica, pórticos, arcos, vigas quebradas y curvas en planta, con cualquier tipo de cargas, efectos térmicos, descensos de apoyos, etc., pueden ser calculadas totalmente, en forma rápida y simple.

El siguiente artículo muestra una nueva aplicación del método.

1) Planteo del Problema

Consideraremos una losa rectangular, según se muestra en la figura 1, con las siguientes hipótesis:

- Una dimensión mucho mayor que la otra, por ejemplo $L_y \gg L_x$
- Las cargas externas actuantes no dependen de la coordenada y , o sea que:

$q = q(x)$ carga distribuida
 $p = p(x)$ carga concentrada de faja

$$[q] = FL^{-2}$$
$$[p] = FL^{-1}$$

- La condición de apoyo en todo el borde, $x = 0$, es la misma, (idem para el borde $x = L$), o sea que el apoyo no varía con la coordenada y .

- Sobre la losa actúa una carga distribuida uniforme de compresión n .

$$[n] = FL^{-1}$$

Se está en presencia de una presoflexión cilíndrica; se estudiará con teoría de segundo orden, o sea que se considerará el pandeo.

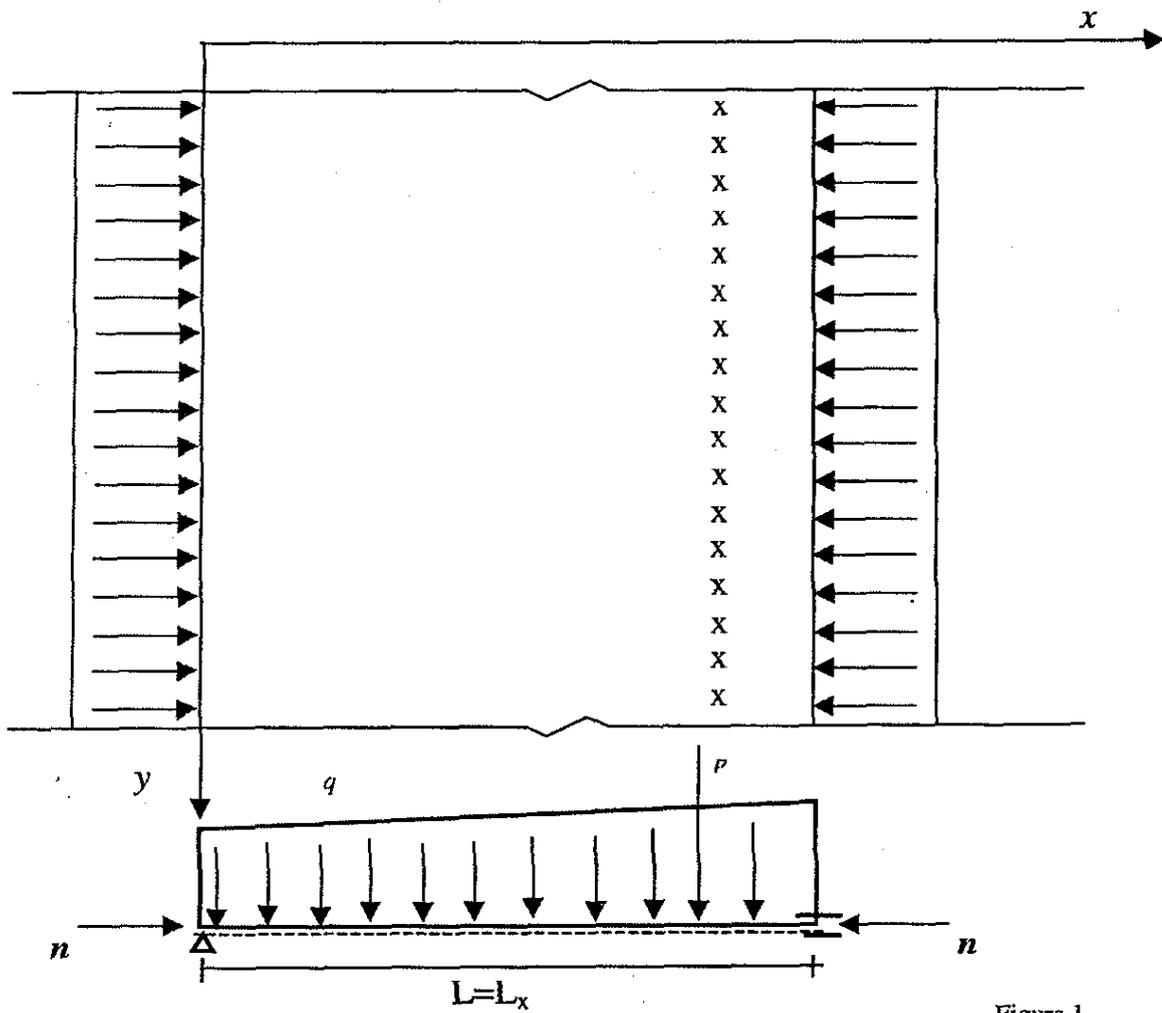


Figura 1

La losa, que en un principio la suponemos de espesor e constante, puede tener nervios rigidizadores rectangulares equidistantes,

superiores o inferiores, perpendiculares al eje y , según se muestra en la figura 2.

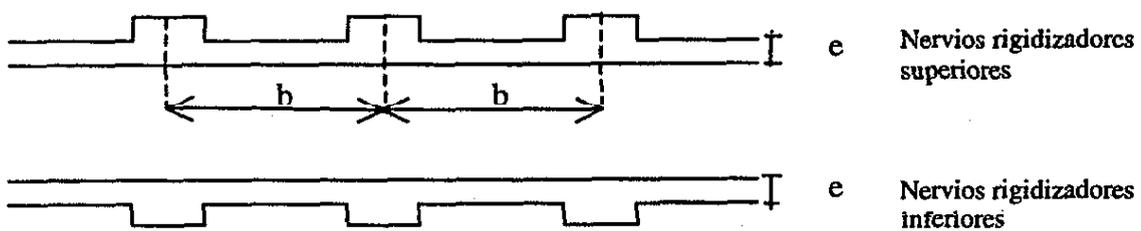


Figura 2

En la práctica, el problema puede aparecer en losas de hormigón, en donde la fuer-

za de compresión n es provocada por pretensado.

2) Teoría utilizada

En este ítem se exponen las fórmulas y conceptos principales de:

- Flexión cilíndrica de losas, teoría de 1er orden.
- Presoflexión de vigas, teoría de 2do orden.

Se supone que la teoría general de ambos puntos, así como el método de las matrices de transferencia, es conocida por el lector. El planteo del problema se realiza despreciando el efecto de la deformación por cortante.

2.1) Flexión cilíndrica de losas, teoría de 1^{er} orden.

- | | | | |
|--|-----------------------------------|---|------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> • Carga exterior : | $p = p(x)$ | } | Dependen sólo de la coordenada x |
| <ul style="list-style-type: none"> • Solicitaciones : | $q_x = q_x(x)$ | | |
| <ul style="list-style-type: none"> 2 cortantes y 2 momentos flectores | $q_y = q_y(x) \equiv 0$ | | |
| | $m_x = m_x(x)$ | | |
| | $m_y = m_y(x) = \nu m_x$ | | |
| <ul style="list-style-type: none"> • Desplazamientos generalizados : | $\theta_x = \theta_x(x)$ | | |
| <ul style="list-style-type: none"> 2 giros y flecha | $\theta_y = \theta_y(x) \equiv 0$ | | |
| | $w = w(x)$ | | |

- Relaciones :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq_x}{dx} = -p \\ \frac{dm_x}{dx} = q_x \\ \frac{d\theta_x}{dx} = \frac{-m_x}{D} \\ \frac{dw}{dx} = \theta_x \end{array} \right.$$

Siendo:

$$D = \frac{E e^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

e : espesor de la losa

E : módulo de Young

ν : módulo de Poisson

$$[D] = FL$$

Se supone como es usual, que el material es homogéneo, elástico lineal.

En los siguientes razonamientos no se tomarán en cuenta q_y , m_y ni θ_y pues son incógnitas desacopladas.

Vectores de estado:

$$h_x = h(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -q_x \\ -m_x \\ D\theta_x(x) \\ Dw(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -q_x \\ -m_x \\ D\theta_x \\ Dw_x \end{bmatrix} \qquad h_0 = h(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -q_x(0) \\ -m_x(0) \\ D\theta_x(0) \\ Dw(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -q_0 \\ -m_0 \\ D\theta_0 \\ Dw_0 \end{bmatrix}$$

De aquí en adelante la coordenada x se da por sobreentendida.

Se cumplirá : $h_x = T_{x0} h_0$

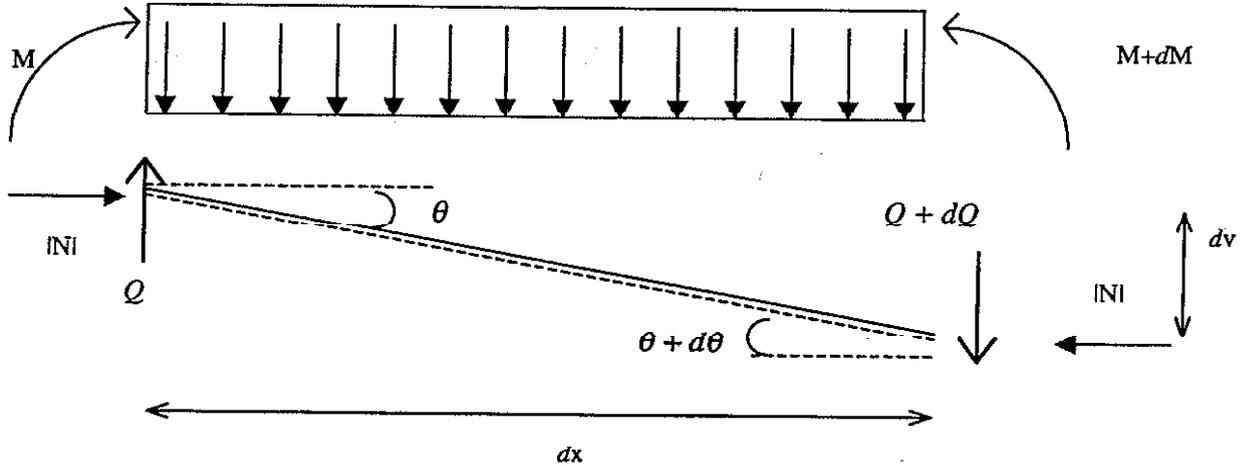
T_{x0} : Matriz de transferencia hacia x desde 0

Por ejemplo , si $p=p_u$ uniforme, se tiene :

$$T_{x0} = \begin{pmatrix} 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_u x & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_u x^2/2 & \vdots & x & 1 & 0 & 0 \\ p_u x^3/6 & \vdots & x^2/2 & x & 1 & 0 \\ p_u x^4/24 & \vdots & x^3/6 & x^2/2 & x & 1 \end{pmatrix}$$

2.2) Presflexión de vigas, teoría de 2^{do} orden.

Consideramos en principio, que $q(x)=q_u$ uniforme, e $I=cte$ en el tramo considerado.



La ecuación diferencial que rige el fenómeno es :

$$\frac{d}{dx} h^* = A h^* + \vec{b}$$

Siendo:

$$h_x^* = \begin{pmatrix} -Q_x \\ -M_x \\ EI\theta_x \\ EIv_x \end{pmatrix} \text{ Vector de estado en } x \text{ reducido} \quad h_x = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ h_x^* \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -k^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad k = \sqrt{\frac{|NI|}{EI}} \quad [k] = I^{-1}$$

$$\text{Vector } \vec{b} = \begin{pmatrix} q_u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se cumplirá que: $h_x = T_{x0} h_0$

$$T_{x0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vec{q}_u & T_{x0}^* & & & \end{pmatrix}$$

T_{x0} : Matriz de transferencia hacia x desde 0.

T_{x0}^* : Matriz de transferencia reducida hacia x desde 0

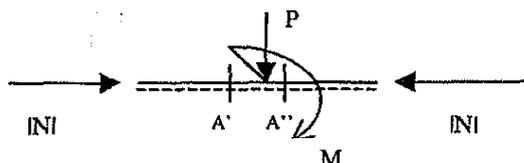
\vec{q}_u : Vector de cargas para carga uniforme

Se demuestra que:

$$T_{x0}^* = e^{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\text{sen } kx}{k} & \cos kx & -k \text{ sen } kx & 0 \\ \frac{1 - \cos kx}{k^2} & \frac{\text{sen } kx}{k} & \cos kx & 0 \\ \frac{kx - \text{sen } kx}{k^3} & \frac{1 - \cos kx}{k^2} & \frac{\text{sen } kx}{k} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{q}_u = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} A^{n-1} \right) \vec{b} = \begin{bmatrix} q_u x \\ q_u \left(\frac{1 - \cos kx}{k^2} \right) \\ q_u \left(\frac{kx - \text{sen } kx}{k^3} \right) \\ \frac{q_u}{k^4} \left(\frac{k^2 x^2}{2} + \cos kx - 1 \right) \end{bmatrix}$$

Se recuerda también que la matriz de transferencia para cargas concentradas, no difiere de la conocida para la teoría de 1^{er} orden.



$$T_{A'A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -M & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se recuerda por último la ecuación de Tottenham:

$$h_A = R_A (E_B T_{BA} R_A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siendo:

R_A : matriz de restitución en el borde izquierdo A

E_B : matriz de extracción en el borde derecho B

$$h_x = T_{xA} h_A$$

3) Presoflexión cilíndrica de losas, teoría de 2° orden

3) Presoflexión cilíndrica de losas, teoría de 2^{do} orden

3.1) Geometría, nomenclatura y fórmulas generales de la resistencia de materiales.

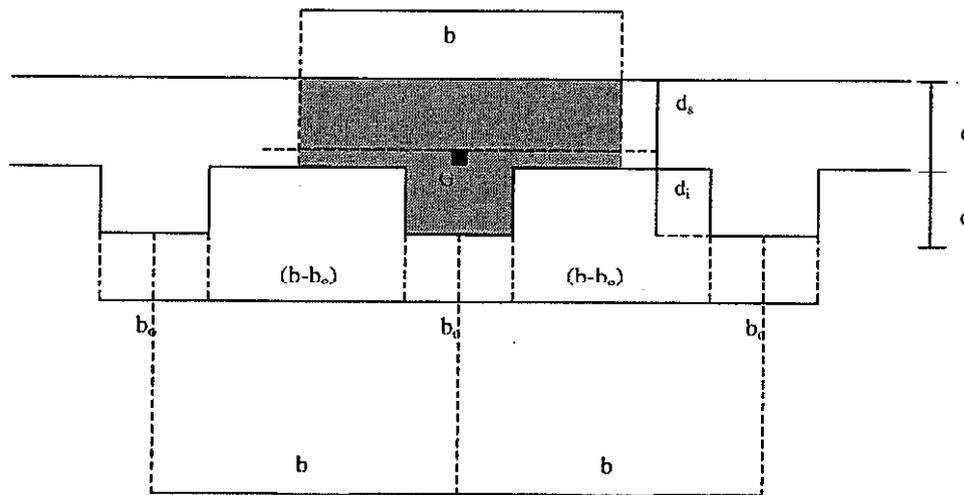


Figura 3:

Se considera la sección de ancho b indicada en la figura 3

- e : espesor de la losa
- c : altura complementaria del nervio rigidizante
- b_0 : ancho del nervio rigidizante
- b : distancia a ejes entre nervios

Se puede calcular:

Area: $A = b_0 c + b e$

Posición del baricentro G:

$$d_i = \frac{b_0 \frac{c^2}{2} + b e \left(c + \frac{e}{2} \right)}{A}$$

$$d_s = e + c - d_i$$

(Nota: si los nervios rigidizantes fueran superiores, intercambiar subíndices)

Inercia baricentral:

$$I_G = \frac{b_o c^3}{12} + b_o c \left(d_i - \frac{c}{2} \right)^2 + \frac{b e^3}{12} + b e \left(d_s - \frac{e}{2} \right)^2$$

Espesor complejo:

Definición:

$$cco = \sqrt[3]{\frac{12 * I_G}{b}}$$

Módulos resistentes:

$$W_s = \frac{I}{d_s} \qquad W_i = \frac{I}{d_i}$$

Tensiones : σ_x

Si n es la fuerza directa de compresión por unidad de longitud, y $m=m_x$ es el momento flector por unidad de longitud

$$NT = n * b \qquad MT = m * b$$

$$\sigma_{sup} = \frac{-|NT|}{A} - \frac{MT}{W_s}$$

$$\sigma_{inf} = \frac{-|NT|}{A} + \frac{MT}{W_i}$$

Ver punto 4.4 Restricciones

Convención de signos:

Tracción > 0
Compresión < 0

Dimensiones:

$$[n] = FL^{-1} \qquad [m] = F \qquad [NT] = F \qquad [MT] = FL$$

$$[A] = L^2 \qquad [I_G] = L^4 \qquad [W_{s,i}] = L^3 \qquad [\sigma] = FL^{-2}$$

3.2) Planteo del problema por matrices de transferencia

Combinando las teorías descritas en el punto 2, definimos:

$$h_x = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ -q_x \\ -m_x \\ D\theta_x \\ Dw_x \end{pmatrix} \text{ Vector de estado en } x \qquad h_o = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ -q_o \\ -m_o \\ D\theta_o \\ Dw_o \end{pmatrix} \text{ Vector de estado en } 0$$

$$h_x = T_{xo} * h_o$$

5*1 5*5 5*1

T_{xo} : Matriz de transferencia hacia x desde 0, de la presoflexión cilíndrica de losas, con teoría de 2^{do}. orden

$$T_{xo} = \begin{pmatrix} 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{q} & \vdots & & T_{xo}^* & & \end{pmatrix}$$

T_{xo}^* : Matriz de transferencia reducida
4*4

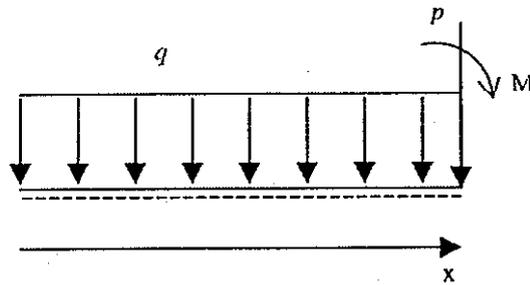
\vec{q} : Vector de cargas
4*1

Siendo :

$$D = \frac{E * eco^3}{12(1-\nu^2)} \quad [D] = FL$$

$$T_{xo}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\text{sen } \lambda x}{\lambda} & \cos \lambda x & -\lambda \text{sen } \lambda x & 0 \\ \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda^2} & \frac{\text{sen } \lambda x}{\lambda} & \cos \lambda x & 0 \\ \frac{\lambda x - \text{sen } \lambda x}{\lambda^3} & \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda^2} & \frac{\text{sen } \lambda x}{\lambda} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{siendo: } \lambda = \sqrt{\frac{|n|}{D}} \quad [\lambda] = L^{-1}$$

A efectos prácticos, consideraremos este segmento de carga:



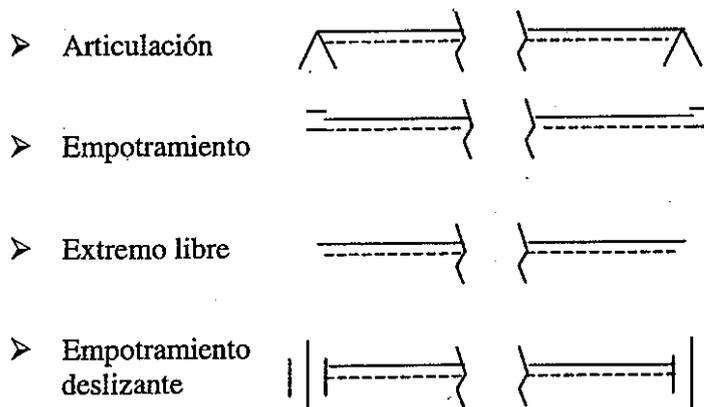
$$\therefore \frac{p}{q} = \begin{bmatrix} qx + p \\ q * \frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda^2} - M \\ q * \frac{\lambda x - \text{sen } \lambda x}{\lambda^3} \\ \frac{q}{\lambda^4} \left(\frac{\lambda^2 x^2}{2} + \cos \lambda x - 1 \right) \end{bmatrix}$$

Con esto, se aplica Totthenham y se resuelve el problema.

4) Software, ejemplos, comentarios y restricciones

4.1) Software

- Se trabaja con un programa escrito en Basic
- La convención de signos para las cargas externas es la usual en concordancia con los ejes definidos
- El segmento de carga considerado es para carga distribuida uniforme y cargas concentradas; pares concentrados de faja se consideran solamente en los bordes
- Condiciones de borde: El programa tiene en cuenta los 4 apoyos perfectos:



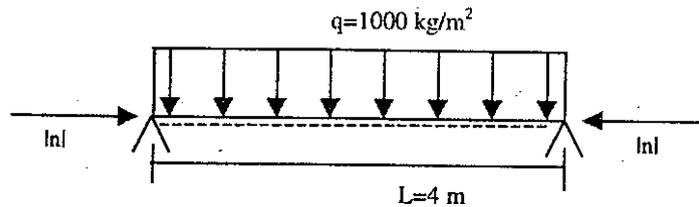
La teoría se puede generalizar por ejemplo para tener en cuenta:

- otro tipo de cargas, por ejemplo trapezoidales o parabólicas

- variaciones de espesor de la losa
- resortes intermedios de faja
- efecto de la deformación por cortante
- losas continuas

4.2) Ejemplos

Ejemplo 1:



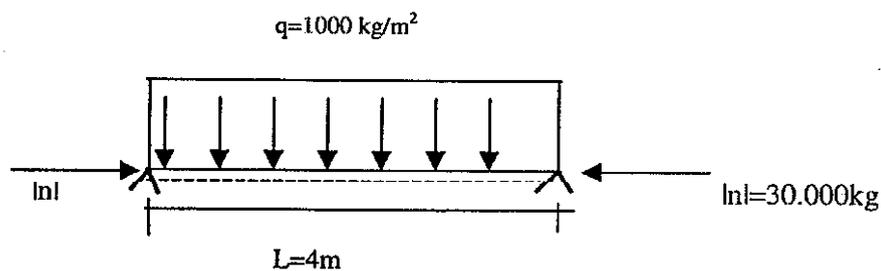
$$\left. \begin{aligned} b_o &= 0.30 \text{ m} \\ c &= 0.10 \text{ m} \\ b &= 1.50 \text{ m} \end{aligned} \right\} \text{Nervios inferiores}$$

$$E = 3 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^2$$

$$\nu = 0.2$$

Se grafican σ_{sup} y σ_{inf} en kg/cm^2 , en función de la fuerza de compresión n, para varios valores del espesor de la losa e.

Ejemplo 2:



$$e = 0.15 \text{ m}$$

Nervios inferiores

$$b_o = 0.30 \text{ m}$$

$$E = 3 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^2$$

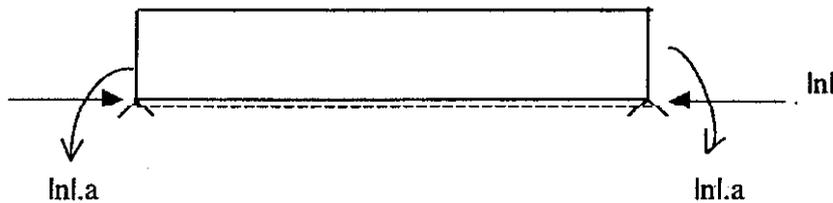
$$\nu = 0.2$$

Se grafican σ_{sup} y σ_{inf} en kg/cm^2 en función de la distancia entre nervios b, para varios valores de c: altura complementaria del nervio.

4.3) Comentarios

a) Se ha supuesto que la fuerza de compresión n está aplicada a nivel del eje baricentral.

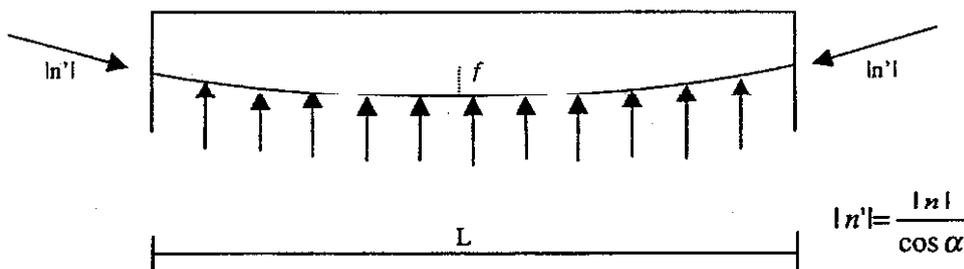
a.1) Si dicha fuerza estuviese aplicada con una excentricidad a respecto del eje baricentral, deberá tenerse en cuenta en el cálculo de los pares externos en los bordes.



a.2) Si la fuerza n es provocada por cables curvos de postensado, por ejemplo parabólicos

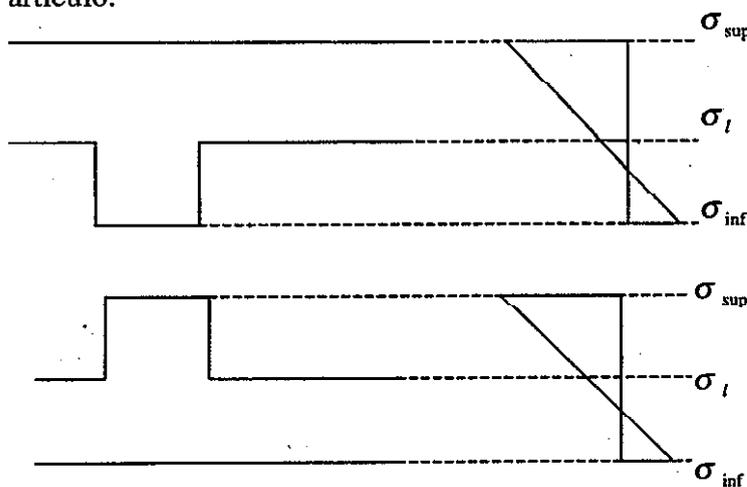
de flecha f , se debe considerar la carga uniforme de abajo hacia arriba, de valor:

$$\frac{8|n|*f}{L^2}$$



a.3) Por último se recuerda que cuando la estructura es hiperestática, la operación de postensado produce deformaciones que en general, no son compatibles con los vínculos y se originan esfuerzos hiperestáticos (parasitarios). Su estudio excede el propósito de este artículo.

b) El programa calcula las tensiones $\sigma_{x \text{ sup}}$, $\sigma_{x \text{ inf}}$ de acuerdo a las hipótesis y fórmulas clásicas de la resistencia de materiales. Teniendo en cuenta el diagrama triangular de tensiones, es muy fácil calcular las tensiones σ indicadas.



c) Con el momento $m_y = v m_x$ se puede calcular la distribución de tensiones σ_y . Es posible entonces calcular en cualquier punto las tensiones principales σ_1 y σ_2 .

4.4) Restricciones

• La teoría desarrollada deberá tener necesariamente ciertas restricciones, para que concuerde aceptablemente con la realidad. En particular, deberán limitarse los valores

de b respecto a b_0 , y de c respecto a e , para que sean válidas las hipótesis y fórmulas clásicas de la resistencia de materiales.

En el programa se han puesto las siguientes restricciones, las que podrán optimizarse teóricamente o mediante resultados experimentales:

$$\begin{cases} b \leq 7 * b_0 \\ c \leq 1.5 * e \end{cases}$$

Por otra parte, el cálculo de σ_{sup} y σ_{inf} es realizado sólo a fines instructivos, pues para que sea válido es necesario que :

$$\begin{aligned} |\sigma_{sup}| &\leq |\sigma_{adm\ compresión}| \\ \sigma_{inf} &\leq \sigma_{adm\ tracción} \end{aligned} \quad \text{(o viceversa)}$$

Si no se cumple alguna condición (por ejemplo la 2da si el material es hormigón), la teoría desarrollada es suficientemente válida hasta el cálculo de solicitaciones y deformaciones iniciales.

Deberíamos abordar entonces el problema del dimensionado, (por ejemplo en hormigón armado), tema que no es motivo de este artículo

