SOBRE LA ELECTRODINÁMICA DE LOS CUERPOS EN MOVIMIENTO

Albert EINSTEIN - 30 de junio de 1905[1]

Es bien conocido que la electrodinámica de Maxwell—como se le entiende usualmente en la actualidad—aplicada a los cuerpos en movimiento, conduce a asimetrías que no parecen ser inherentes a los fenómenos. Tomemos, por ejemplo, la acción electrodinámica recíproca entre un imán y un conductor. Aquí, el fenómeno observado sólo depende del movimiento relativo entre el conductor y el imán, mientras desde el punto de vista convencional se hace una distinción muy marcada entre los dos casos en los que uno de los dos cuerpos está en movimiento. Si el imán está en movimiento y el conductor en reposo, aparece en la vecindad del imán un campo eléctrico con una cierta energía definida, produciendo una corriente en los lugares donde se sitúan partes del conductor. Pero si el imán está estacionario y el conductor en movimiento, no aparece ningún campo eléctrico en la vecindad del imán. En el conductor, sin embargo, encontramos una fuerza electromotriz, para la que no hay una energía correspondiente, pero que da origen—suponiendo la igualdad del movimiento relativo en los dos casos discutidos—a corrientes eléctricas con la misma trayectoria e intensidad que las producidas por las fuerzas eléctricas en el primer caso.

Ejemplos de este tipo, junto con los intentos fracasados para descubrir algún movimiento de la Tierra relativo al "medio de la luz," sugieren que los fenómenos electrodinámicos, como los mecánicos, no poseen propiedades correspondientes a la idea de reposo absoluto. Más bien sugieren que, como ha sido demostrado hasta el primer orden en cantidades pequeñas, las mismas leyes de la electrodinámica y la óptica son válidas para todos los sistemas de referencia en los que las ecuaciones de la mecánica funcionan[2]. Elevaremos esta conjetura (que en adelante será llamada el "Principio de Relatividad") al status de un postulado, y también introduciremos otro postulado, que sólo en apariencia es irreconciliable con el primero, a saber, que la luz se propaga siempre en el vacío con una velocidad definida **c** que es independiente del estado de movimiento del cuerpo emisor. Estos dos postulados son suficientes para alcanzar una teoría simple y consistente de la electrodinámica de cuerpos en movimiento basada en la teoría de Maxwell para cuerpos estacionarios. Se probará que la introducción del "éter luminoso" es superflua, en tanto que el punto de vista desarrollado aquí no requerirá un "espacio absolutamente estacionario" provisto de propiedades especiales, ni asignar un vector-velocidad al punto del vacío en el que los procesos electromagnéticos tienen lugar.

La teoría a desarrollar está basada—como toda la electrodinámica—en la cinemática del cuerpo rígido, puesto que las afirmaciones de tal teoría tienen que ver con las relaciones

[1] Esta transcripción en LATEX de la traducción del inglés al español del artículo publicado originalmente en alemán por Albert Eisntein (Zur Elektrodynamik bewegter Körper, en Annalen der Physik, 17:891, 1905) fue hecha por Gustavo A. Ponce (http://www.fisica.unah.hn/gponce/), basado en la traducción de John Walker (http://www.fourmilab.ch/). Se tradujo únicamente el texto, dejando las ecuaciones tal y como aparecen en la transcripción en TEX de John Walker. Este archivo es del dominio público y puede ser utilizado en cualquier forma sin permisos, restricciones, reconocimientos ni compensaciones.

[2] La memoria presente de Lorentz no era conocida por el autor en ese momento.

entre cuerpos rígidos (sistemas de coordenadas), relojes, y procesos electromagnéticos. La consideración insuficiente de esta circunstancia está en la raíz de las dificultades que la electrodinámica de los cuerpos en movimiento encuentra en el presente.

I. PARTE CINEMÁTICA

§ 1. Definición de Simultaneidad

Consideremos un sistema de coordenadas en el que las ecuaciones de la mecánica Newtoniana son válidas.[3] Para hacer nuestra presentación más precisa y para distinguir verbalmente este sistema de coordenadas de otros que serán introducidos posteriormente, le llamaremos el "sistema estacionario."

Si un punto material está en reposo con respecto a este sistema de coordenadas, su posición puede definirse relativamente utilizando un sistema rígido de medición, con los métodos de la geometría Euclidiana, y puede expresarse en coordenadas cartesianas.

Si deseamos describir el *movimiento* de un punto material, damos los valores de sus coordenadas como funciones del tiempo. Debemos tener en mente que una descripción matemática de esta naturaleza no tiene significado físico a menos que tengamos muy claro qué entendemos por "tiempo." Tenemos que tomar en cuenta que todos los enunciados en los que el tiempo juega un papel son enunciados sobre *eventos simultáneos*. Si, por ejemplo, yo digo "Ese tren llega aquí a las 7 en punto," lo que quiero decir es algo como: "El apuntamiento de la manecilla pequeña de mi reloj hacia el 7 y la llegada del tren son eventos simultáneos."[4]

Podría parecer posible superar las dificultades de la definición de "tiempo" sustituyendo "la posición de la manecilla pequeña de mi reloj" por "tiempo". En efecto, dicha definición es satisfactoria cuando lo que nos concierne es la definición de un tiempo exclusivamente para el lugar en el que se localiza el reloj; pero ya no es satisfactoria cuando tenemos que conectar en el tiempo series de eventos que ocurren en lugares diferentes, o—lo que es lo mismo— evaluar los tiempos para eventos que ocurren en lugares lejanos al reloj.

Podríamos, desde luego, conformarnos con los valores de tiempo determinados por un observador estacionado junto al reloj en el origen de coordenadas, coordinando las posiciones correspondientes de las manecillas mediante señales luminosas, emitidas por cada evento cronometrado, llegándole a través del vacío. Pero esta coordinación tiene la desventaja de no ser independiente del punto en el que se encuentra el observador con el reloj, como sabemos por experiencia. Llegamos a una determinación mucho más práctica pensando de la siguiente manera:

Si hay un reloj en el punto A del espacio, un observador en A puede determinar los valores de tiempo de eventos en la proximidad inmediata de A encontrando las posiciones de las manecillas que son simultáneas con dichos eventos. Si hay otro reloj en el punto B, parecido en todo respecto al de A, es posible para un observador en B determinar los valores de tiempo de los eventos en la vecindad inmediata de B. Pero no

[3] i.e. como primera aproximación
[4] 3No discutiremos aquí la inexactitud que acecha el concepto de simultaneidad de dos eventos que ocurren aproximadamente en el mismo lugar, que sólo puede ser removida por una abstracción.

es posible comparar, con respecto al tiempo, un evento en A con un evento en B sin suposiciones adicionales. Hasta ahora sólo hemos definido un "tiempo A" y un "tiempo B." No hemos definido un "tiempo" común para A y B, y no se puede definir a menos que establezcamos por definición que el "tiempo" requerido por la luz para viajar de A a B es igual al "tiempo" que requiere para viajar de B a A. Consideremos un rayo de luz que sale de A hacia B en el "tiempo A" t_A, se refleja en B al "tiempo B" t_B en dirección a A, y llega nuevamente a A en el "tiempo A" t'_A.

De acuerdo a la definición los dos relojes se sincronizan si:

$$t_B - t_A = t'_A - t_B$$

Asumimos que esta definición de sincronismo está libre de contradicciones, y es posible para cualquier número de puntos; y que las siguientes relaciones son universalmente válidas:

1. Si el reloj en B se sincroniza con el reloj en A, el reloj en A se sincroniza con el reloj en B.
2. Si el reloj en A se sincroniza con el reloj en B y también con el reloj en C, los relojes en B y C también se sincronizan entre ellos.

Entonces con la ayuda de ciertos experimentos físicos imaginarios hemos establecido lo que debe entenderse por relojes sincrónicos estacionarios localizados en distintos lugares, y evidentemente hemos obtenido una definición de "simultáneo" o "sincrónico," y de "tiempo". El "tiempo" de un evento está dado simultáneamente con el evento por un reloj estacionario situado en el lugar del evento, y este reloj está sincronizado, y de hecho sincronizado para todas las determinaciones de tiempo, con un reloj estacionario específico.

De acuerdo a la experiencia, asumimos además que la cantidad:

$$\frac{2AB}{t'_A - t_A} = c$$

es una constante universal - la velocidad de la luz en el vacío.

Es esencial definir el tiempo mediante relojes estacionarios en el sistema estacionario, y al tiempo definido apropiadamente para el sistema estacionario le llamamos "el tiempo del sistema estacionario."

§ 2. Sobre la Relatividad de Longitudes y Tiempos

Las siguientes reflexiones están basadas en el principio de relatividad y en el principio de constancia de la velocidad de la luz. Definimos estos dos principios como sigue:

1. Las leyes por las que los estados de los sistemas físicos cambian no son afectadas, ya sea que se refieran a uno u otro de dos sistemas de coordenadas en movimiento de traslación uniforme.
*2. Cualquier rayo de luz se mueve en el sistema "estacionario" de coordenadas con una velocidad determinada **c**, ya sea que el rayo sea emitido por un cuerpo estacionario o por uno en movimiento.*

Por tanto:

$$\textit{Velocidad} = \frac{\textit{Longitud de la trayectoria}}{\textit{Intervalo de tiempo}}$$

donde el intervalo de tiempo se toma en el sentido que se ha definido en § 1.

Sea una barra estacionaria rígida; y sea su longitud l, medida con una regla también estacionaria. Ahora imaginamos que el eje de la barra está a lo largo del eje de las x del sistema estacionario de coordenadas, y que se da a la barra un movimiento uniforme de traslación con velocidad v a lo largo del eje x, en la dirección creciente de x. Ahora nos preguntamos por la longitud de la barra en movimiento, e imaginamos que su longitud es obtenida por medio de las dos operaciones siguientes:

(a) El observador se mueve junto con la regla y la barra a medir, y mide la longitud de la barra directamente superponiendo la regla, justamente de la misma manera que si los tres estuvieran en reposo.
(b) Por medio de relojes estacionarios instalados en el sistema estacionario y sincronizados de acuerdo a § 1, el observador comprueba en qué puntos del sistema estacionario están los extremos de la barra a medir en un tiempo definido.

La distancia entre esos dos puntos, medida por la regla ya empleada, que en este caso está en reposo, es también una longitud que puede ser designada como "la longitud de la barra."

De acuerdo al principio de relatividad la longitud encontrada por medio de la operación (a) - a la que llamaremos "la longitud de la barra en el sistema en movimiento" - debe ser igual a la longitud l de la barra estacionaria. A la longitud encontrada por medio de la operación (b) le llamaremos "la longitud de la barra (en movimiento) en el sistema estacionario." La determinaremos en base a nuestros dos principios, y encontraremos que es diferente de l.

La cinemática actual asume tácitamente que las longitudes determinadas por medio de estas dos operaciones son precisamente iguales, o en otras palabras, que un cuerpo rígido en movimiento en la época t puede representarse perfectamente en sus aspectos geométricos por el mismo cuerpo en reposo en una posición definida.

Imaginamos además que en los extremos A y B de la barra, se colocan relojes que se sincronizan don los relojes del sistema estacionario, es decir que sus indicaciones corresponden en cualquier instante al "tiempo del sistema estacionario" en los lugares donde se encuentran. Estos relojes son por tanto "sincrónicos en el sistema estacionario." Y también imaginamos que con cada reloj hay un observador en movimiento, y que estos observadores aplican a ambos relojes el criterio establecido en § 1 para la sincronización de los dos relojes. Sea un rayo de luz que sale de A al tiempo[5] t_A, y es reflejado en V al tiempo t_B, y llega nuevamente a A al tiempo t'_A.

[5] "Tiempo" denota aquí "tiempo del sistema estacionario" y también "posición de las manecillas del reloj en movimiento situado en el lugar en discusión."

Teniendo en cuenta el principio de constancia de la velocidad de la luz encontramos que:

$$\boldsymbol{t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c - v}} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{c + v}}$$

donde $\boldsymbol{r_{AB}}$ denota la longitud de la barra en movimiento - medida en el sistema estacionario. Observadores moviéndose con la barra en movimiento encontrarían entonces que los dos relojes no están sincronizados, mientras los observadores en el sistema estacionario dirían que los relojes están sincronizados.

Vemos pues que no podemos atribuir ningún significado absoluto al concepto de simultaneidad, sino que dos eventos que, vistos desde un sistema de coordenadas son simultáneos, no se pueden considerar como eventos simultáneos cuando se les contempla desde un sistema que está en movimiento en relación a ese sistema.

§ 3. Teoría de la Transformación de Coordenadas y Tiempos de un Sistema Estacionario a otro Sistema en Movimiento de Traslación Uniforme en Relación al Primero

Tomemos dos sistemas de coordenadas en el espacio "estacionario", i.e. dos sistemas, cada uno de tres líneas materiales rígidas, perpendiculares entre sí, saliendo de un punto. Supongamos que los ejes de las X de ambos sistemas coinciden, y que los ejes de las Y y las Z son paralelos, respectivamente. Cada sistema está provisto de una regla y un número de relojes, y las dos reglas y todos los relojes de los dos sistemas son semejantes en todos sus aspectos.

Ahora al origen de uno de los dos sistemas (***k***) se le imparte una velocidad ***v*** en la dirección creciente de x del otro sistema estacionario (**K**), esta velocidad se comunica a los ejes de coordenadas, a la regla relevante, y a los relojes. A cada tiempo del sistema estacionario K corresponderá una posición definida de los ejes del sistema en movimiento, y por razones de simetría podemos asumir que el movimiento de ***k*** puede ser tal que los ejes del sistema en movimiento al tiempo ***t*** (este "***t***" siempre denota un tiempo en el sistema estacionario) son paralelos a los ejes del sistema estacionario.

Ahora imaginamos que el espacio se mide desde el sistema estacionario **K** por medio de la regla estacionaria, y también desde el sistema en movimiento k por medio de la regla que se mueve con él; y que por tanto obtenemos las coordenadas x, y, z, y ξ, η, ζ, respectivamente. Además, que el tiempo se mide en todos los puntos del sistema estacionario donde hay relojes por medio de señales de luz en la manera descrita en § 1; de manera semejante, el tiempo τ en el sistema en movimiento se determina en todos los puntos del sistema móvil en el que hay relojes en reposo con respecto a ese sistema aplicando el método, dado en § 1, de señales luminosas entre los puntos en los que estos últimos relojes están situados.

A cada sistema de valores x, y, z, t, que define completamente el lugar y el tiempo de un evento en el sistema estacionario, corresponde un sistema de valores ξ, η, ζ, τ, determinando ese evento con respecto al sistema k, y nuestra tarea es ahora encontrar el sistema de ecuaciones que conectan estas cantidades.

En primer lugar es claro que las ecuaciones deben ser lineales de acuerdo a las propiedades de homogeneidad que atribuimos al espacio y al tiempo.
Si ponemos $x' = x - vt$, es claro que un punto en reposo en el sistema ***k*** debe tener un sistema de valores $x', y, z,$ independientes del tiempo. Definimos primero τ como una función de x', y, z, y t. Para hacer esto tenemos que expresar en ecuaciones el hecho de que τ no es más que el sumario de los datos de relojes en reposo en el sistema ***k***, que han sido sincronizado de acuerdo a la regla dada en § 1.

Sea un rayo emitido desde el origen del sistema k al tiempo τ_0 a lo largo del eje-X hacia x', reflejado al tiempo τ_1 de allí hacia el origen de coordenadas al tiempo τ_1 , llegando al tiempo τ_2 entonces debemos tener $1/2\,(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$ o, insertando los argumentos de la función τ y aplicando el principio de constancia de la velocidad de la luz en el sistema estacionario:

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,t) + \tau\left(0,0,0,t + \frac{x'}{c-v} + \frac{x'}{c+v}\right)\right] = \tau\left(x',0,0,t + \frac{x'}{c-v}\right)$$

Por lo tanto, si x' se escoge infinitesimalmente pequeña,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{1}{c-v}\frac{\partial\tau}{\partial t},$$

o

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{v}{c^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0.$$

Debe notarse que en vez del origen de coordenadas podríamos haber escogido cualquier otro punto como origen del rayo, y que la ecuación que acabamos de obtener es por tanto válida para todos los valores de x', y, z.

Uno consideración análoga - aplicada a los ejes de las Y y las Z - teniendo en mente que la luz es siempre propagada a lo largo de estos ejes, vista desde el sistema estacionario, con la velocidad $\sqrt{c^2 - v^2}$ nos da:

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = 0, \frac{\partial\tau}{\partial z} = 0.$$

Puesto que τ es una función lineal, se sigue de estas ecuaciones que:

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{c^2-v^2}x'\right)$$

donde ***a*** es una función $\phi(v)$ desconocida por el momento, y donde por brevedad se asume que en el origen de ***k***, $\tau = 0$, cuando $t = 0$.

Con la ayuda de este resultado determinamos fácilmente las cantidades ξ, η, ζ expresando en ecuaciones el hecho de que la luz (como es requerido por el principio de constancia de la velocidad de la luz, en combinación con el principio de relatividad) también se propaga con velocidad c medida en el sistema en movimiento. Porque para un rayo de luz emitido al tiempo $\tau = 0$ en la dirección creciente de ξ:

$$\xi = c\tau \text{ o } \xi = ac\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right).$$

Pero el rayo se mueve con respecto al punto inicial de ***k***, cuando se le mide en el sistema estacionario, con velocidad ***c − v***, de manera que:

$$\frac{x'}{c - v} = t.$$

Si insertamos este valor de ***t*** en la ecuación para ξ, obtenemos

$$\xi = a\frac{c^2}{c^2 - v^2}x'.$$

De manera análoga encontramos, considerando rayos que moviéndose a lo largo de los otros dos ejes, que

$$\eta = c\tau = ac\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right)$$

cuando

$$\frac{y}{\sqrt{c^2 - v^2}} = t,\ x' = 0.$$

Por lo tanto,

$$\eta = a\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}y \text{ and } \zeta = a\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}z.$$

Sustituyendo el valor de ***x'***, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\tau &= \phi(v)\beta(t - vx/c^2), \\
\xi &= \phi(v)\beta(t - vt), \\
\eta &= \phi(v)y, \\
\zeta &= \phi(v)z,
\end{aligned}$$

donde:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

y ϕ es aún una función desconocida de ***v***. Si no se hace ninguna suposición acerca de la posición inicial del sistema en movimiento ni del punto cero de τ, debe agregarse una constante aditiva en el lado derecho de cada una de estas ecuaciones.

Ahora debemos probar que cualquier rayo de luz, medido en el sistema en movimiento, se propaga con velocidad c, si, como hemos asumido, este es el caso en el sistema estacionario; puesto que hasta ahora no hemos probado que el principio de constancia de la velocidad de la luz es compatible con el principio de relatividad.

En el tiempo t = τ = 0, cuando los dos sistemas tienen un origen de coordenadas común, sea una onda esférica emitida desde allí, propagándose con velocidad ***c*** en el sistema K. Si ***(x, y, z)*** es un punto al que esta onda acaba de alcanzar, entonces:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2.$$

Transformando esta ecuación con la ayuda de nuestras ecuaciones de transformación obtenemos después de un cálculo simple

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2\tau^2.$$

La onda considerada es por tanto igualmente esférica con velocidad de propagación ***c*** cuando se le ve desde el sistema en movimiento. Esto demuestra que nuestros dos principios fundamentales son compatibles[6].

En las ecuaciones de transformación que han sido desarrolladas hay una función desconocida ϕ de ***v***, que determinaremos ahora.

Para este propósito introducimos un tercer sistema de coordenadas ***K'***, en estado de movimiento de translación paralelo al eje de las X en relación al sistema ***k***, de tal manera que el origen de coordenadas del sistema k se mueve con velocidad **−*v*** sobre el eje X. Dejemos que los tres orígenes coincidan al tiempo t = 0 y que el tiempo ***t'*** del sistema ***K'*** sea cero cuando ***t = x = y = z = 0.***

Llamamos a las coordenadas, medidas en el sistema ***K', x', y', z',*** y mediante una doble aplicación de nuestras ecuaciones de transformación obtenemos:

$$\begin{array}{lclcl}
t' & = & \phi(-v)\beta(-v)(\tau + v\xi/c^2) & = & \phi(v)\phi(-v)t, \\
x' & = & \phi(-v)\beta(-v)(\xi + v\tau) & = & \phi(v)\phi(-v)x, \\
y' & = & \phi(-v)\eta & = & \phi(v)\phi(-v)y, \\
z' & = & \phi(-v)\zeta & = & \phi(v)\phi(-v)z.
\end{array}$$

Puesto que las relaciones entre ***x', y', z'*** y ***x, y, z*** no contienen al tiempo ***t***, los sistemas K y ***K'*** están en reposo el uno con respecto al otro, y es claro que la transformación de K a ***K'*** debe ser la transformación idéntica. Entonces:

$$\phi(v)\phi(-v) = 1.$$

Ahora nos preguntamos por el significado de $\phi(v)$. Prestamos atención a la parte del eje de las **Y** del sistema ***k*** comprendido entre $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$ y ξ = 0, η = ***l***, ζ = 0. Esta parte del eje **Y** es una barra moviéndose perpendicularmente a su eje con velocidad *v* relativa al sistema **K**. Sus extremos tienen en **K** las coordenadas

$$x_1 = vt,\ y_1 = \frac{l}{\phi(v)},\ z_1 = 0$$

y

$$x_2 = vt,\ y_2 = 0,\ z_2 = 0.$$

Por tanto la longitud de la barra medida en **K** es $l/\phi(v)$; y esto nos da el significado de la función $\phi(v)$. Por razones de simetría es ahora evidente que la longitud de una barra dada moviéndose perpendicularmente a su eje, medida en el sistema estacionario, debe

[6] Las ecuaciones de la transformación de Lorentz pueden deducirse en forma más simple directamente de la condición de que en virtud de esas ecuaciones la relación $x^2+y^2+z^2 = c^2t^2$ tendrá como consecuencia la segunda relación $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2\tau^2$.

depender sólo de la velocidad y no de la dirección y el sentido del movimiento. La longitud de la barra en movimiento medida en el sistema estacionario no cambia, por lo tanto, si ***v*** y −***v*** se intercambian. Por tanto se sigue que $l/\phi(v) = l/\phi(-v)$, o

$$\phi(v) = \phi(-v).$$

Se sigue de esta relación y de la previamente encontrada que $\phi(v)$ = 1, de tal manera que las ecuaciones de transformación encontradas vienen a ser

$$\begin{aligned} \tau &= \beta(t - vx/c^2), \\ \xi &= \beta(x - vt), \\ \eta &= y, \\ \zeta &= z, \end{aligned}$$

donde

$$\beta = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

§ 4. Significado Físico de las Ecuaciones Obtenidas en Relación a Cuerpos Rígidos y Relojes en Movimiento

Consideremos una esfera rígida[7] de radio **R**, en reposo relativo al sistema en movimiento ***k***, y con su centro en el origen de coordenadas de ***k***. La ecuación de la superficie de esta esfera en movimiento relativo al sistema **K** con velocidad ***v*** es:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \mathrm{R}^2.$$

La ecuación de esta superficie expresada en ***x, y, z*** al tiempo ***t*** = 0 es

$$\frac{x^2}{(\sqrt{1 - v^2/c^2})^2} + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2.$$

Un cuerpo rígido que, medido en un estado de reposo, tiene la forma de una esfera, tiene por tanto en estado de movimiento - visto desde el sistema estacionario - la forma de un elipsoide de revolución con los ejes

$$\mathrm{R}\sqrt{1 - v^2/c^2},\ \mathrm{R},\ \mathrm{R}.$$

Así, mientras que las dimensiones **Y** y **Z** de la esfera (y por tanto de todo cuerpo rígido sin importar su forma) no aparecen modificados por el movimiento, la dimensión **X** parece contraerse por un factor 1 : $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, i.e. mientras mayor el valor de ***v***, mayor la contracción. Para ***v* = *c*** todos los objetos en movimiento - vistos desde el sistema "estacionario" - se contraen a figuras planas.

Para velocidades mayores que la de la luz nuestras deliberaciones no tienen sentido; encontraremos, sin embargo, en lo que sigue, que en nuestra teoría la velocidad de la luz juega el papel, físicamente, de una velocidad infinitamente grande.

Es claro que los mismos resultados son válidos para cuerpos en reposo en el sistema "estacionario", vistos desde el sistema en movimiento uniforme.

[7] Es decir, un cuerpo con forma esférica cuando se le examina en reposo.

Seguidamente, imaginamos uno de los relojes calificados para marcar el tiempo ***t*** cuando está en reposo relativo al sistema estacionario, y el tiempo τ cuando está en reposo relativo al sistema en movimiento, localizado en el origen de coordenadas de k, ajustado de manera que marque el tiempo τ. ¿A qué ritmo marcha este reloj, visto desde el sistema estacionario?

Entre las cantidades ***x, t*** y τ, que se refieren a la posición del reloj, tenemos, evidentemente, ***x = vt*** y

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(t - vx/c^2).$$

Por tanto,

$$\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2} = t - (1 - \sqrt{1 - v^2/c^2})t$$

de donde se sigue que el tiempo marcado por el reloj (visto en el sistema estacionario) se lentifica por un factor $1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}$ segundos por segundo, o ignorando magnitudes de cuarto y mayor órdenes por $\frac{1}{2}v^2/c^2$.

De aquí sobreviene la siguiente consecuencia peculiar. Si en los puntos **A** y **B** de **K** hay relojes estacionarios que, vistos en el sistema estacionario están sincronizados; y si el reloj en **A** se mueve con velocidad ***v*** a lo largo de la línea **AB** hacia **B,** entonces cuando llega a **B** ya no están sincronizados, sino el reloj que se movió de **A** a **B** se atrasa con respecto al que ha permanecido en **B** en $\frac{1}{2}tv^2/c^2$ (hasta términos de cuarto y mayor órdenes), siendo t el tiempo transcurrido en el viaje de **A** a **B.**

Es aparente que este resultado es válido aún si el reloj se mueve de **A** a **B** en cualquier curva poligonal, y también cuando los puntos **A** y **B** coinciden.

Si asumimos que el resultado demostrado para una curva poligonal es también válido para una curva con curvatura continua, llegamos a este resultado:

Si uno de dos relojes sincronizados en **A** se mueve en una curva cerrada con velocidad constante hasta que regresa a **A**, y el viaje dura ***t*** segundos, entonces de acuerdo al reloj que ha permanecido en reposo el reloj que ha viajado estará $\frac{1}{2}tv^2/c^2$ segundos atrasado al llegar a **A**. Por lo tanto concluimos que un reloj de balancín[8] en el Ecuador debe ir más lento, por una cantidad pequeña, que un reloj precisamente semejante situado en uno de los polos bajo condiciones idénticas aparte del movimiento.

§ 5. La Composición de Velocidades

En el sistema ***k*** moviéndose a lo largo del eje de las **X** del sistema **K** con velocidad ***v***, consideremos un punto que se mueve de acuerdo a las ecuaciones:

$$\xi = w_\xi \tau, \eta = w_\eta \tau, \zeta = 0,$$

[8] No uno de péndulo, que es físicamente un sistema al que la Tierra pertenece. Este caso tuvo que ser excluido.

donde w_ξ y w_η denotan constantes.

Se busca: el movimiento del punto relativo al sistema **K.** Si con la ayuda de las ecuaciones de transformación desarrolladas en § 3 introducimos las cantidades ***x, y, z, t*** en las ecuaciones de movimiento del punto, obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{w_\xi + v}{1 + v w_\xi / c^2} t, \\ y &= \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v w_\xi / c^2} w_\eta t, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Entonces la ley del paralelogramo de velocidades es válida sólo como primera aproximación de acuerdo a nuestra teoría. Ponemos:

$$\begin{aligned} V^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \\ w^2 &= w_\xi^2 + w_\eta^2, \\ a &= \tan^{-1} w_y / w_x, \end{aligned}$$

a debe verse entonces como el ángulo entre las velocidades ***v*** y ***w.*** Después de un cálculo simple obtenemos:

$$V = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw\cos a) - (vw \sin a / c)^2}}{1 + vw \cos a / c^2}.$$

Vale la pena comentar que ***v*** y ***w*** entran en la expresión para la velocidad resultante en forma simétrica. Si ***w*** también está en la dirección del eje de las **X**, obtenemos

$$V = \frac{v + w}{1 + vw/c^2}.$$

De esta ecuación se sigue que de la composición de dos velocidades menores que ***c***, siempre resulta una velocidad menor que ***c.*** Porque si ponemos ***v* = *c* −** κ, ***w* = *c* −** λ, siendo κ y λ positivas y menores que ***c,*** entonces

$$V = c \frac{2c - \kappa - \lambda}{2c - \kappa - \lambda + \kappa\lambda/c} < c.$$

Se sigue, además, que la velocidad de la luz ***c*** no puede ser afectada por composición con una velocidad menor que la de la luz. Para este caso obtenemos

$$V = \frac{c + w}{1 + w/c} = c.$$

También podríamos haber obtenido la fórmula para **V**, para el caso en el que ***w*** y ***v*** tienen la misma dirección, componiendo dos transformaciones de acuerdo a § 3. Si además de los sistemas **K** y ***k*** que aparecen en § 3 introducimos otro sistema de coordenadas ***k'*** moviéndose paralelamente a ***k***, con su punto inicial moviéndose sobre el eje de las **X** con velocidad ***w***, obtenemos ecuaciones entre las cantidades ***x, y, z, t*** y las cantidades correspondientes de ***k'***, que difieren de las ecuaciones encontradas en § 3 sólo porque el lugar de "***v***" ha sido tomado por la cantidad

$$\frac{v+w}{1+vw/c^2};$$

de donde vemos que esas transformaciones paralelas – necesariamente - forman un grupo.
Hemos deducido las leyes de la cinemática correspondientes a nuestros dos principios, y procedemos a mostrar su aplicación en electrodinámica.

II. PARTE ELECTRODINÁMICA

§ 6. Transformación de las ecuaciones de Maxwell-Hertz en el Vacío. Sobre la Naturaleza de las Fuerzas Electromotrices que Ocurren en un Campo Magnético Durante el Movimiento

Supongamos que las ecuaciones de Maxwell-Hertz son válidas en el vacío en el sistema estacionario **K**, de modo que tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}, & \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}, & \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y}, & \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x},
\end{aligned}$$

donde **(X, Y, Z)** denota el vector de fuerza eléctrica, y **(L, M, N)** el de fuerza magnética.

Si aplicamos a estas ecuaciones la transformación desarrollada en § 3, refiriendo los procesos electromagnéticos al sistema de coordenadas que se mueve con velocidad ***v*** introducido allí, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial \tau} &= \tfrac{\partial}{\partial \eta}\left\{\beta\left(\mathrm{N}-\tfrac{v}{c}\mathrm{Y}\right)\right\} & &-\tfrac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\beta\left(\mathrm{M}+\tfrac{v}{c}\mathrm{Z}\right)\right\},\\
\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(\mathrm{Y}-\tfrac{v}{c}\mathrm{N}\right)\right\} &= \tfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \xi} & &-\tfrac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\beta\left(\mathrm{N}-\tfrac{v}{c}\mathrm{Y}\right)\right\},\\
\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(\mathrm{Z}-\tfrac{v}{c}\mathrm{M}\right)\right\} &= \tfrac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(\mathrm{M}-\tfrac{v}{c}\mathrm{Z}\right)\right\} & &-\tfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \eta},\\
\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \tau} &= \tfrac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\beta\left(\mathrm{Y}-\tfrac{v}{c}\mathrm{N}\right)\right\} & &-\tfrac{\partial}{\partial \eta}\left\{\beta\left(\mathrm{Z}-\tfrac{v}{c}\mathrm{M}\right)\right\},\\
\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(\mathrm{M}-\tfrac{v}{c}\mathrm{Z}\right)\right\} &= \tfrac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(\mathrm{Z}-\tfrac{v}{c}\mathrm{M}\right)\right\} & &-\tfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial \zeta},\\
\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(\mathrm{N}-\tfrac{v}{c}\mathrm{Y}\right)\right\} &= \tfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial \eta} & &-\tfrac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(\mathrm{Y}-\tfrac{v}{c}\mathrm{N}\right)\right\},
\end{aligned}$$

donde

$$\beta = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Ahora el principio de relatividad requiere que si las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el vacío son válidas en el sistema **K**, también lo sean en el sistema ***k***; es decir que los vectores de fuerza eléctrica y magnética - ***(X', Y', Z')*** y ***(L', M', N')*** - del sistema en movimiento ***k***, que se definen por sus efectos ponderomotrices en masas eléctricas y magnéticas respectivamente, satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{X}'}{\partial \tau} &= \frac{\partial \mathrm{N}'}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial \zeta}, & \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{L}'}{\partial \tau} &= \frac{\partial \mathrm{Y}'}{\partial \zeta} - \frac{\partial \mathrm{Z}'}{\partial \eta}, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{Y}'}{\partial \tau} &= \frac{\partial \mathrm{L}'}{\partial \zeta} - \frac{\partial \mathrm{N}'}{\partial \xi}, & \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial \tau} &= \frac{\partial \mathrm{Z}'}{\partial \xi} - \frac{\partial \mathrm{X}'}{\partial \zeta}, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{Z}'}{\partial \tau} &= \frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial \xi} - \frac{\partial \mathrm{L}'}{\partial \eta}, & \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{N}'}{\partial \tau} &= \frac{\partial \mathrm{X}'}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathrm{Y}'}{\partial \xi}.
\end{aligned}
$$

Evidentemente los dos sistemas de ecuaciones encontrados en el sistema ***k*** deben expresar exactamente lo mismo, puesto que ambos sistemas de ecuaciones son equivalente las ecuaciones de Maxwell-Hertz en el sistema **K**. Puesto que, además, las ecuaciones de los dos sistemas coinciden, excepto por los símbolos para los vectores, las funciones que ocurren en lugares correspondientes en los sistemas de ecuaciones deben coincidir, con la excepción del factor ***(v),*** que es común a todas las funciones de uno de los sistemas de ecuaciones, y es independiente de ξ, η, ζ y τ pero depende de **v**. Por tanto tenemos las relaciones

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}' &= \psi(v)\mathrm{X}, & \mathrm{L}' &= \psi(v)\mathrm{L}, \\
\mathrm{Y}' &= \psi(v)\beta\left(\mathrm{Y} - \tfrac{v}{c}\mathrm{N}\right), & \mathrm{M}' &= \psi(v)\beta\left(\mathrm{M} - \tfrac{v}{c}\mathrm{Z}\right), \\
\mathrm{Z}' &= \psi(v)\beta\left(\mathrm{Z} - \tfrac{v}{c}\mathrm{M}\right), & \mathrm{N}' &= \psi(v)\beta\left(\mathrm{N} - \tfrac{v}{c}\mathrm{Y}\right).
\end{aligned}
$$

Si ahora formamos el recíproco de este sistema de ecuaciones, primero resolviendo las ecuaciones obtenidas, y luego aplicando las ecuaciones a la transformación inversa (de ***k*** a **K**), que está caracterizada por la velocidad **−*v***, se sigue, cuando consideramos que los dos sistemas de ecuaciones obtenidos deben ser idénticos, que $\psi(v)\psi(-v) = 1$. Además, por razones de simetría[9]

$$\psi(v) = 1,$$

y nuestras ecuaciones toman la forma:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}' &= \mathrm{X}, & \mathrm{L}' &= \mathrm{L}, \\
\mathrm{Y}' &= \beta\left(\mathrm{Y} - \tfrac{v}{c}\mathrm{N}\right), & \mathrm{M}' &= \beta\left(\mathrm{M} + \tfrac{v}{c}\mathrm{Z}\right), \\
\mathrm{Z}' &= \beta\left(\mathrm{Z} + \tfrac{v}{c}\mathrm{M}\right), & \mathrm{N}' &= \beta\left(\mathrm{N} - \tfrac{v}{c}\mathrm{Y}\right).
\end{aligned}
$$

En cuanto a la interpretación de estas ecuaciones hacemos los siguientes comentarios:

Sea una carga eléctrica puntual de magnitud "uno" medida en el sistema estacionario **K,** i.e. que cuando está en reposo en el sistema estacionario ejerce una fuerza de una dina sobre la misma cantidad de electricidad a una distancia de un cm. Por el principio de relatividad esta carga también tiene magnitud "uno" cuando se mide en el sistema en movimiento. Si esta cantidad de electricidad está en reposo relativo al sistema estacionario, entonces por definición el vector **(X, Y, Z)** es igual a la fuerza que actúa sobre ella. Si la cantidad de electricidad está en reposo relativo al sistema en movimiento (por lo menos en el instante relevante), entonces la fuerza que actúa sobre

[9] Si, por ejemplo, X=Y=Z=L=M=0, y N $\neq$ 0, entonces es claro, por simetría, que cuando ***v*** cambia de signo sin cambiar su valor numérico, ***Y'*** también debe cambiar de signo sin cambiar su valor numérico.

ella, medida en el sistema en movimiento, es igual al vector ***(X', Y', Z').*** En consecuencia las tres primeras ecuaciones de arriba pueden ser descritas en palabras en las dos maneras siguientes:

1. Si una carga eléctrica puntual unitaria está en movimiento en un campo electromagnético, actúa sobre ella, además de la fuerza eléctrica, una "fuerza electromotriz" que, despreciando los términos multiplicados por las potencias segunda y mayores de v/c, es igual al producto vectorial de la velocidad de la carga y la fuerza magnética, dividida entre la velocidad de la luz. (Forma antigua de expresión.)

2. Si una carga eléctrica puntual unitaria está en movimiento en un campo electromagnético, la fuerza que actúa sobre ella es igual a la fuerza eléctrica presente en el lugar de la carga, como comprobamos mediante la transformación del campo a un sistema de coordenadas en reposo relativo a la carga eléctrica. (Nueva forma de expresión.)

La analogía funciona con "fuerzas magnetomotrices." Vemos que en el desarrollo de la teoría la fuerza electromotriz juega meramente el papel de un concepto auxiliar, que debe su introducción a la circunstancia de que las fuerzas eléctricas y magnéticas no existen independientemente del estado de movimiento del sistema de coordenadas.

Además es claro que la asimetría mencionada en la introducción que surge cuando consideramos las corrientes producidas por el movimiento relativo de un imán y un conductor, ha desaparecido. Más aún, preguntas en cuanto al "asiento" de la fuerza electromotriz electrodinámica (máquinas unipolares) ya no tienen sentido.

§ 7. Teoría del Principio de Doppler y de la Aberración

Consideremos una fuente de ondas electromagnéticas en el sistema **K**, muy lejos del origen de coordenadas, que en la región del espacio que contiene al origen de coordenadas puede representarse hasta un buen grado de aproximación por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= \mathrm{X}_0 \sin\Phi, & \mathrm{L} &= \mathrm{L}_0 \sin\Phi, \\ \mathrm{Y} &= \mathrm{Y}_0 \sin\Phi, & \mathrm{M} &= \mathrm{M}_0 \sin\Phi, \\ \mathrm{Z} &= \mathrm{Z}_0 \sin\Phi, & \mathrm{N} &= \mathrm{N}_0 \sin\Phi, \end{aligned}$$

donde

$$\Phi = \omega \left\{ t - \frac{1}{c}(lx + my + nz) \right\}.$$

Aquí **(X_0, Y_0, Z_0)** y **(L_0, M_0, N_0)** son los vectores que definen la amplitud del tren de ondas, y ***l, m, n*** los cosenos directores de los normales a las ondas.

Queremos conocer la constitución de estas ondas, cuando son examinadas por un observador en reposo en el sistema en movimiento ***k.***

Aplicando las ecuaciones de transformación encontradas en § 6 para fuerzas eléctricas y magnéticas, y las encontradas en § 3 para las coordenadas y el tiempo, obtenemos directamente

$$
\begin{array}{ll}
X' = X_0 \sin \Phi', & L' = L_0 \sin \Phi', \\
Y' = \beta(Y_0 - vN_0/c) \sin \Phi', & M' = \beta(M_0 + vZ_0/c) \sin \Phi', \\
Z' = \beta(Z_0 + vM_0/c) \sin \Phi', & N' = \beta(N_0 - vY_0/c) \sin \Phi', \\
\end{array}
$$
$$
\Phi' = \omega' \left\{ \tau - \tfrac{1}{c}(l'\xi + m'\eta + n'\zeta) \right\}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\omega' &= \omega\beta(1 - lv/c), \\
l' &= \frac{l - v/c}{1 - lv/c}, \\
m' &= \frac{m}{\beta(1 - lv/c)}, \\
n' &= \frac{n}{\beta(1 - lv/c)}.
\end{aligned}
$$

De la ecuación para ω' se sigue que si un observador se mueve con velocidad ***v*** relativa a una fuente de luz de frecuencia ν infinitamente distante, de tal manera que la línea que conecta a la fuente con el observador forma un ángulo ϕ con la velocidad del observador referida a un sistema de coordenadas que está en reposo relativo a la fuente de luz, la frecuencia ν' de la luz percibida por el observador está dada por la ecuación

$$
\nu' = \nu \frac{1 - \cos\phi \cdot v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.
$$

Este es el principio de Doppler para cualquier velocidad. Cuando $\phi = 0$ la ecuación asume la forma

$$
\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.
$$

Vemos que, en contraste con la imagen de costumbre, cuando $v = -c, \nu' = \infty.$
Si llamamos al ángulo entre la normal a la onda (dirección del rayo) y la línea "fuente-observador" en el sistema en movimiento ϕ', la ecuación para **l'** toma la forma

$$
\cos\phi' = \frac{\cos\phi - v/c}{1 - \cos\phi \cdot v/c}.
$$

Esta ecuación expresa la ley de aberración en su forma más general. Si $\phi = \frac{1}{2}\pi$, la ecuación se transforma simplemente en

$$
\cos\phi' = -v/c.
$$

Aún tenemos que encontrar la amplitud de las ondas, como aparecen en el sistema en movimiento. Si denotamos la amplitud de la fuerza eléctrica o magnética por **A** o ***A'*** respectivamente, de acuerdo a si se le mide en el sistema estacionario o en el sistema en movimiento, obtenemos

$$
A'^2 = A^2 \frac{(1 - \cos\phi \cdot v/c)^2}{1 - v^2/c^2}
$$

tal ecuación, si $\phi = 0$, se simplifica a

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - v/c}{1 + v/c}.$$

Se sigue de estos resultados que para un observador que se acerca a una fuente de luz con velocidad ***c***, esta fuente de luz debe parecerle de intensidad infinita.

§ 8. Transformación de la Energía de los Rayos de Luz. Teoría de la Presión de Radiación Sobre Reflectores Perfectos

Puesto que $A^2/8\pi$ es igual a la energ´ıa de la luz por unidad de volumen, debemos considerar a $A'^2/8\pi$, por el principio de relatividad, como la energía de la luz en el sistema en movimiento. Por tanto A'^2/A^2 sería la razón entre las energías "medida en movimiento" y "medida en reposo" para un haz luminoso dado, si el volumen del haz luminoso fuera el mismo, ya sea medido en **K** o en ***k***. Pero este no es el caso. Si ***l, m, n*** son los cosenos directores de las normales de la onda en el sistema estacionario, no pasa energ´ıa a través de los elementos de superficie de una superficie esférica moviéndose con la velocidad de la luz:

$$(x - lct)^2 + (y - mct)^2 + (z - nct)^2 = R^2.$$

Podemos decir por tanto que esta superficie encierra permanentemente el mismo haz luminoso. Nos preguntamos por la cantidad de energ´ıa encerrada por esta superficie, vista en el sistema ***k***, es decir, por la energía del haz luminoso relativa al sistema ***k.***

La superficie esférica - vista desde el sistema en movimiento - es una superficie elipsoidal, cuya ecuación, al tiempo $\tau = 0$, es

$$(\beta\xi - l\beta\xi v/c)^2 + (\eta - m\beta\xi v/c)^2 + (\zeta - n\beta\xi v/c)^2 = R^2.$$

Si **S** es el volumen de la esfera, y **S'** el del elipsoide, entonces por un simple cálculo

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \cos\phi \cdot v/c}.$$

Por tanto, si llamamos **E** a la energía luminosa encerrada por esta superficie cuando se le mide en el sistema estacionario, y ***E'*** cuando se le mide en el sistema en movimiento, obtenemos

$$\frac{E'}{E} = \frac{A'^2 S'}{A^2 S} = \frac{1 - \cos\phi \cdot v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

y esta fórmula, cuando $\phi = 0$, se simplifica a

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

Es notable que la energía y la frecuencia del conjunto luminoso varían con el estado de movimiento del observador de acuerdo a la misma ley.

Ahora supongamos que el plano coordenado $\xi = 0$ es una superficie perfectamente reflectora, en la que las ondas planas consideradas en § 7 son reflejadas.

Buscamos la presión que la luz ejerce sobre la superficie reflectora, y la dirección, frecuencia, e intensidad de la luz después de la reflexión.

Si la luz incidente se define mediante las cantidades $\mathrm{A}, \cos\phi, \nu$ (referidas al sistema **K**). Vistas desde ***k*** las cantidades correspondientes son

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}' &= \mathrm{A}\frac{1-\cos\phi\cdot v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\\
\cos\phi' &= \frac{\cos\phi - v/c}{1-\cos\phi\cdot v/c},\\
\nu' &= \nu\frac{1-\cos\phi\cdot v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.
\end{aligned}$$

Para la luz reflejada, refiriendo el proceso al sistema ***k***, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}'' &= \mathrm{A}'\\
\cos\phi'' &= -\cos\phi'\\
\nu'' &= \nu'
\end{aligned}$$

Finalmente, transformando de nuevo al sistema estacionario **K**, obtenemos para la luz reflejada

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}''' &= \mathrm{A}''\frac{1+cos\phi''\cdot v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \mathrm{A}\frac{1-2\cos\phi\cdot v/c+v^2/c^2}{1-v^2/c^2},\\
\cos\phi''' &= \frac{\cos\phi''+v/c}{1+\cos\phi''\cdot v/c} = -\frac{(1+v^2/c^2)\cos\phi - 2v/c}{1-2\cos\phi\cdot v/c+v^2/c^2},\\
\nu''' &= \nu''\frac{1+\cos\phi''\cdot v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \nu\frac{1-2\cos\phi\cdot v/c+v^2/c^2}{1-v^2/c^2}.
\end{aligned}$$

La energía (medida en el sistema estacionario) que incide por unidad de área y unidad de tiempo sobre el espejo es evidentemente: $\mathrm{A}^2(c\cos\phi - v)/8\pi$.

La energ´ıa que abandona una unidad de superficie del espejo por unidad de tiempo es: $\mathrm{A}'''^2(-c\cos\phi''' + v)/8\pi$.

La diferencia entre estas dos expresiones es, por el principio de energía, el trabajo hecho por unidad de tiempo por la presión de la luz. Si igualamos este trabajo al producto **P*v***, donde **P** es la presión de la luz, obtenemos

$$\mathrm{P} = 2\cdot\frac{\mathrm{A}^2}{8\pi}\frac{(\cos\phi - v/c)^2}{1-v^2/c^2}.$$

De acuerdo con el experimento y con otras teorías, obtenemos como primera aproximación

$$\mathrm{P} = 2\cdot\frac{\mathrm{A}^2}{8\pi}\cos^2\phi.$$

Todos los problemas de la óptica de cuerpos en movimiento pueden resolverse por el método empleado aquí. Lo esencial es que las fuerzas eléctrica y magnética de la luz influenciada por el cuerpo en movimiento, sean transformadas a un sistema de coordenadas en reposo con respecto al cuerpo.

Por este medio todos los problemas de la óptica de los cuerpos en movimiento serán reducidos a una serie de problemas de la óptica de cuerpos estacionarios.

§ 9. Transformación de las Ecuaciones de Maxwell-Hertz cuando se Toman en Cuenta Corrientes de Convección

Empezamos con las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t}+u_x\rho\right\} &= \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}, & \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y},\\
\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial t}+u_y\rho\right\} &= \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}, & \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z},\\
\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial t}+u_z\rho\right\} &= \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y}, & \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x},
\end{aligned}$$

donde

$$\rho=\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z}$$

denota 4π veces la densidad de electricidad, y (u_x, u_y, u_z) el vector velocidad de la carga. Si imaginamos las cargas eléctricas acopladas en forma invariante a pequeños cuerpos rígidos (iones, electrones), estas ecuaciones son la base electromagnética de la electrodinámica y la óptica Lorentziana de cuerpos en movimiento.

Supongamos que estas ecuaciones son válidas en el sistema **K**, y transformémoslas, con la ayuda de las ecuaciones de transformación dadas en §3 y §6, al sistema ***k***. Entonces obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathrm{X}'}{\partial \tau}+u_\xi\rho'\right\} &= \frac{\partial \mathrm{N}'}{\partial \eta}-\frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial \zeta}, & \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{L}'}{\partial \tau} &= \frac{\partial \mathrm{Y}'}{\partial \zeta}-\frac{\partial \mathrm{Z}'}{\partial \eta},\\
\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathrm{Y}'}{\partial \tau}+u_\eta\rho'\right\} &= \frac{\partial \mathrm{L}'}{\partial \zeta}-\frac{\partial \mathrm{N}'}{\partial \xi}, & \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial \tau} &= \frac{\partial \mathrm{Z}'}{\partial \xi}-\frac{\partial \mathrm{X}'}{\partial \zeta},\\
\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathrm{Z}'}{\partial \tau}+u_\zeta\rho'\right\} &= \frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial \xi}-\frac{\partial \mathrm{L}'}{\partial \eta}, & \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{N}'}{\partial \tau} &= \frac{\partial \mathrm{X}'}{\partial \eta}-\frac{\partial \mathrm{Y}'}{\partial \xi},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
u_\xi &= \frac{u_x-v}{1-u_xv/c^2}\\
u_\eta &= \frac{u_y}{\beta(1-u_xv/c^2)}\\
u_\zeta &= \frac{u_z}{\beta(1-u_xv/c^2)},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\rho' &= \frac{\partial \mathrm{X}'}{\partial \xi}+\frac{\partial \mathrm{Y}'}{\partial \eta}+\frac{\partial \mathrm{Z}'}{\partial \zeta}\\
&= \beta(1-u_xv/c^2)\rho.
\end{aligned}$$

Puesto que - como se deduce del teorema de adición de velocidades (§ 5) – el vector (u_ξ, u_η, u_ζ) no es más que la velocidad de la carga eléctrica, medida en el sistema ***k***, tenemos la prueba de que, en base a nuestros principios cinemáticos, los fundamentos electrodinámicos de la teoría electrodinámica de los cuerpos en movimiento de Lorentz están de acuerdo al principio de relatividad.
Adicionalmente debo comentar brevemente que la siguiente importante ley puede ser deducida fácilmente de las ecuaciones desarrolladas: Si un cuerpo eléctricamente cargado se encuentra en movimiento en cualquier parte del espacio sin alterar su carga cuando se le considera desde un sistema de coordenadas moviéndose con el cuerpo, su carga también permanece - cuando se le considera desde el sistema “estacionario” **K** - constante.

§ 10. Dinámica del Electrón Acelerado Lentamente

Sea una partícula cargada (que en adelante será llamada un “electrón”) en movimiento en un campo electromagnético, para cuya ley de movimiento asumimos lo siguiente:

Si el electrón está en reposo en un momento dado, en el siguiente instante de tiempo le sobreviene un movimiento de acuerdo a las ecuaciones

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \epsilon \mathrm{X} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \epsilon \mathrm{Y} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \epsilon \mathrm{Z} \end{aligned}$$

donde ***x, y, z*** denotan las coordenadas del electrón, y ***m*** la masa del electrón, siempre y cuando su movimiento sea lento.

Ahora, seguidamente, sea la velocidad del electrón en un momento dado ***v***. Buscamos la ley de movimiento del electrón en los instantes de tiempo inmediatamente subsiguientes. Sin afectar el carácter general de nuestras consideraciones, podemos asumir, y así lo haremos, que el electrón, en el momento que le prestamos atención, está en el origen de coordenadas, y se mueve con velocidad ***v*** a lo largo del eje de las **X** del sistema **K**. Es claro entonces que en el instante dado ***(t = 0)*** el electrón está en reposo relativo al sistema de coordenadas que está en movimiento paralelo con velocidad v a lo largo del eje de las **X**.

De la suposición anterior, en combinación con el principio de relatividad, es claro que en el tiempo inmediatamente subsiguiente (para valores peque˜nos de ***t***) el electrón, visto desde el sistema ***k***, se mueve de acuerdo a las ecuaciones

$$\begin{aligned} m\frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= \epsilon \mathrm{X}', \\ m\frac{d^2\eta}{d\tau^2} &= \epsilon \mathrm{Y}', \\ m\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} &= \epsilon \mathrm{Z}', \end{aligned}$$

en las que los símbolos $\xi, \eta, \zeta, \mathrm{X}', \mathrm{Y}', \mathrm{Z}'$ se refieren al sistema ***k.*** Si, además, decidimos que cuando ***t = x = y = z = 0*** entonces $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$, las transformaciones de §3 y §6 son válidas, de modo que tenemos

$$\xi = \beta(x - vt), \eta = y, \zeta = z, \tau = \beta(t - vx/c^2),$$
$$\mathrm{X}' = \mathrm{X}, \mathrm{Y}' = \beta(\mathrm{Y} - v\mathrm{N}/c), \mathrm{Z}' = \beta(\mathrm{Z} + v\mathrm{M}/c).$$

Con la ayuda de estas ecuaciones transformamos las ecuaciones de movimiento de arriba del sistema ***k*** al sistema **K**, y obtenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{d^2x}{dt^2} & = & \frac{\epsilon}{m\beta^3}\mathrm{X} \\ \frac{d^2y}{dt^2} & = & \frac{\epsilon}{m\beta}\left(\mathrm{Y} - \frac{v}{c}\mathrm{N}\right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} & = & \frac{\epsilon}{m\beta}\left(\mathrm{Z} - \frac{v}{c}\mathrm{M}\right) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{A})$$

Tomando el punto de vista ordinario ahora nos preguntamos por las masas "longitudinal" y "transversal" del electrón en movimiento. Escribimos las ecuaciones (A) de la forma:

$$\begin{array}{rcccl} m\beta^3\frac{d^2x}{dt^2} & = & \epsilon\mathrm{X} & = & \epsilon\mathrm{X}', \\ m\beta^2\frac{d^2y}{dt^2} & = & \epsilon\beta\left(\mathrm{Y} - \frac{v}{c}\mathrm{N}\right) & = & \epsilon\mathrm{Y}', \\ m\beta^2\frac{d^2z}{dt^2} & = & \epsilon\beta\left(\mathrm{Z} - \frac{v}{c}\mathrm{M}\right) & = & \epsilon\mathrm{Z}', \end{array}$$

comentando en primer lugar que $\epsilon\mathrm{X}', \epsilon\mathrm{Y}', \epsilon\mathrm{Z}'$ son las componentes de la fuerza ponderomotriz que actúa sobre el electrón, y en efecto lo son vistas en un sistema que se mueve en ese momento con el electrón, con la misma velocidad que el electrón. (Esta fuerza podría ser medida, por ejemplo, por una balanza de resorte en reposo en el último sistema mencionado.) Ahora si llamamos a esta fuerza simplemente "la fuerza que actúa sobre el electrón,"[10] y mantenemos la ecuación - masa × aceleración = fuerza - y si también decidimos que las aceleraciones se medirán en el sistema estacionario **K**, derivamos de las ecuaciones de arriba

$$\begin{array}{rcl} \text{Masa longitudinal} & = & \dfrac{m}{(\sqrt{1 - v^2/c^2})^3}. \\ \text{Masa transversal} & = & \dfrac{m}{1 - v^2/c^2}. \end{array}$$

Con una definición diferente de fuerza y aceleración habríamos obtenido naturalmente otros valores para las masas. Esto nos muestra que al comparar distintas teorías del movimiento del electrón debemos proceder muy cautelosamente.

Comentamos que estos resultados para la masa también son válidos para puntos materiales masivos, puesto que un punto material se puede convertir en un electrón (en nuestro sentido de la palabra) añadiéndole una carga eléctrica ***no importa qué tan peque˜na***.

[10] La definición de fuerza dada aquí no es ventajosa, como fue demostrado inicialmente por M. Planck. Se trata de definir la fuerza de tal manera que las leyes de momentum y energ´ıa asumen su forma más simple.

Ahora determinaremos la energ´ıa cinética del electrón. Si un electrón se mueve desde el reposo en el origen de coordenadas del sistema **K** a lo largo del eje de las **X** bajo la acción de una fuerza electrostática **X**, es claro que la energ´ıa obtenida del campo electrostático tiene el valor $\int \epsilon \mathrm{X}\, dx$. Como el electrón se va acelerando lentamente, y por tanto no puede emitir energ´ıa en forma de radiación, la energ´ıa obtenida del campo electrostático debe igualarse a la energ´ıa de movimiento **W** del electrón. Teniendo en mente que la primera de las ecuaciones (A) es aplicable durante todo el proceso de movimiento que estamos considerando, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{W} &= \int \epsilon \mathrm{X}\, dx = m \int_0^v \beta^3 v\, dv \\ &= mc^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Por tanto, cuando ***v* = *c***, **W** se vuelve infinita. Velocidades mayores que la de la luz no tienen - como en nuestros resultados previos - posibilidad de existir.

Esta expresión para la energía cinética también debe aplicarse, en virtud del argumento enunciado arriba, a partículas masivas.

Ahora enumeraremos las propiedades del movimiento del electrón que resultan del sistema de ecuaciones (A), y son accesibles a la experimentación.

1. De la segunda ecuación del sistema (A) se sigue que una fuerza eléctrica **Y** y una fuerza magnética **N** tienen una acción deflectante de igual intensidad sobre un electrón que se mueve con velocidad ***v***, cuando **Y = N *v/c***. Por tanto vemos que es posible en nuestra teoría determinar la velocidad del electrón a partir de la razón entre la potencia de deflexión magnética $\mathbf{A_m}$ y la potencia de deflexión eléctrica $\mathbf{A_e}$, para cualquier velocidad, aplicando la ley

   $$\frac{\mathrm{A}_m}{\mathrm{A}_e} = \frac{v}{c}.$$

   Esta relación puede ser examinada experimentalmente, puesto que la velocidad del electrón puede medirse directamente, e.g. por medio de campos eléctricos y magnéticos oscilando rápidamente.

2. De la deducción para la energ´ıa cinética del electrón se sigue que la relación entre la diferencia de potencial, **P**, y la velocidad adquirida ***v*** por el electrón debe ser

   $$\mathrm{P} = \int \mathrm{X} dx = \frac{m}{\epsilon} c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right\}.$$

3. Calculamos el radio de curvatura de la trayectoria del electrón cuando hay una fuerza magnética **N** presente (y es la única fuerza deflectante), actuando perpendicularmente a la velocidad del electrón. De la segunda de las ecuaciones (A) obtenemos

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{\mathrm{R}} = \frac{\epsilon}{m}\frac{v}{c}\mathrm{N}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

o

$$\mathrm{R} = \frac{mc^2}{\epsilon} \cdot \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \frac{1}{\mathrm{N}}.$$

Estas tres relaciones son una expresión completa de las leyes de acuerdo a las que, según la teoría presentada aquí, el electrón debe moverse.

En conclusión quiero decir que al trabajar con el problema aquí planteado he tenido la leal asistencia de mi amigo y colega M. Besso, y que estoy en deuda con él por varias valiosas sugerencias.