La Calculadora Matricial: una aplicación para la resolución de los problemas numéricos más habituales del Álgebra Lineal

The Matrix Calculator: an application for the most common numerical problems solving in Linear Algebra

Juan Flaquer[1] *Araceli Gutiérrez-Gutiérrez*[2] *Carmen Blanco*[3]

Recibido: mayo 2016 Aceptado: julio 2016

Resumen.- El objetivo de este artículo es compartir, con la comunidad educativa y científica, la utilidad del nuevo programa denominado Calculadora Matricial. El citado programa se viene usando desde el curso académico 2011-2012, fundamentalmente, en la enseñanza del Álgebra Lineal, en el primer curso de las diferentes titulaciones de Tecnun, Escuela de Ingenieros, de la Universidad de Navarra en San Sebastián. Se ha comprobado que cumple con las expectativas previstas para el aprendizaje de los alumnos, al tiempo que proporciona un gran atractivo para el estudio del Álgebra Lineal, sobre todo en su vertiente práctica.
La aplicación ha sido desarrollada utilizando el programa MATLAB®. La Calculadora Matricial consta de un conjunto independiente de más de 150 funciones. Las funciones y el programa principal van acompañados de un pdf, con las instrucciones de uso, y de una colección de ejemplos resueltos.

Palabras clave: Calculadora Matricial; MATLAB; Interfaz de usuario; Innovación educativa.; Algebra Lineal.

Summary.- *The aim of this article is to share with the educational and scientific community, the usefulness of the new program called Matrix Calculator. That program has been used since the academic year 2011-2012, mainly in teaching Linear Algebra, in the first year of the different degrees of Tecnun, School of Engineering. (University of Navarra, in San Sebastián, Spain). It has been found that meets all expectations for student learning, while providing a great attraction for the study of Linear Algebra, mainly in its practical side. The application has been developed using MATLAB®. The Matrix Calculator consists of a separate set of more than 150 functions. These functions and the main program are accompanied by a simple pdf file with the user's instructions and a set of solved examples.*

Keywords: *Matrix Calculator; MATLAB; User interface. Educational innovation. Linear Algebra.*

1. Introducción.- Los motivos que han impulsado el diseño de esta aplicación han sido, de una parte, la conveniencia de contar, los profesores, con una herramienta informática ágil que les permita no solo la confección de nuevos ejercicios para los alumnos sino también la corrección de los que estos les presenten, y, de otra parte, el haber tomado conciencia de la utilidad de esta herramienta para los propios alumnos en el estudio personal de la asignatura.

[1] TECNUN, Universidad de Navarra, San Sebastián, España, jflaquer@tecnun.es
[2] Attendis, Andalucía, España, araceli.gutierrez@colegio-sierrablanca.com
[3] TECNUN, Universidad de Navarra, San Sebastián, España, cblanco@tecnun.es

A diferencia de lo que se suele hacer en Secundaria, en los primeros cursos de ingeniería se contempla como actitud el que los alumnos deben desarrollar la capacidad de autoevaluarse, ejercitándose con ejercicios y problemas distintos de los resueltos en clase, para lo cual la calculadora puede suponer un importante apoyo.

La implantación de Bolonia en la organización de las enseñanzas universitarias afecta a las clases magistrales, reduciéndolas en importancia, en aras de un trabajo más personal del alumno, con la consiguiente evaluación continua. Esto supone un reto nuevo para el profesor que debe centrarse en su exposición en aquello que piensa ser especialmente relevante o que el alumno no va a saber captar por sí solo o, finalmente, que la síntesis de los conocimientos a transmitir no se halla en un texto determinado. El tiempo es reducido y el profesor debe seleccionar muy bien los contenidos a transmitir, por lo que debe aprovecharse de la tecnología actual para no perder eficacia docente, Flaquer [1].

De ahí que el autor de la aplicación se haya dedicado durante años al desarrollo de un Laboratorio Virtual de Matemáticas de ayuda a la docencia. Forma parte del citado Laboratorio la Calculadora Matricial, de la que nos vamos a centrar en este trabajo exclusivamente.

En este momento, para el uso de la Calculadora Matricial, es necesario que el usuario tenga acceso a una versión de MATLAB suficientemente actual. Está previsto el trasladar la Calculadora Matricial a un lenguaje libre de costos.

La participación en este artículo de otros dos autores se debe al doble objetivo que cumple y puede cumplir la calculadora: como recurso didáctico e instrumental de cálculo, por una parte en los primeros cursos de Ingeniería y Bachillerato y por otra, como herramienta exploratoria y de comprobación en la investigación. Cada uno de los autores es especialista en uno de estos bloques.

2. Utilidad práctica de la Calculadora Matricial y metodología de uso

2.1 Utilidad docente.- Las calculadoras comenzaron a utilizarse en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas desde los años 70, cuando aparecieron las primeras máquinas de bajo costo que permitían hacer las operaciones aritméticas básicas, Gómez [2].

En la misma línea de sus predecesoras, la Calculadora Matricial está centrada en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en este caso, de un primer curso de Ingeniería, donde se imparta la asignatura de Álgebra Lineal.

La Calculadora Matricial se encuentra dentro de los marcos de referencia fundamentales de uso de las nuevas tecnologías (TIC) en la práctica docente que establece Moreno [3]: funcionalidad, posibilidades didácticas y aspectos técnicos. Y cumple con las expectativas previstas para el aprendizaje de los alumnos, al tiempo que proporciona un gran atractivo para el estudio del Álgebra Lineal, sobre todo en su vertiente práctica dado que el cálculo matricial está presente en numerosas aplicaciones prácticas de ámbitos tan diversos como la Ingeniería, la Economía, la Estadística o la Ecología, Lay [4].

La Calculadora ayuda indudablemente, como ha sido probado en numerosas ocasiones, a la realización de ejercicios numéricos aislados o concatenados, aportando seguridad en los cálculos intermedios y definitivos. Permite a los profesores comprobar de un modo rápido y comprensible los resultados de los ejercicios hechos a mano, preparando los exámenes o pruebas de curso; en esas comprobaciones, los alumnos también pueden descubrir los problemas de falta de precisión que se pueden dar en los cálculos numéricos, y es un elemento motivador que valora positivamente el error. Al mismo tiempo la calculadora permite que los alumnos puedan

ISSN 2301-1092 • ISSN (en línea) 2301-1106

concentrarse en la comprensión de los conceptos y procedimientos más complejos que se trabajan en los distintos problemas, partiendo de la base de que los cálculos en sí mismos no son el objeto de la evaluación en cada caso. Una medición cuantificada de estas afirmaciones, con relación a los alumnos, no es sencilla, para no condicionar la libertad del estudiante en el uso o no uso de la calculadora.

La utilidad de esta Calculadora se ve incrementada porque realiza los cálculos correctos pertinentes, sin necesidad de programar, a lo que se añade el mantenimiento en la aplicación de un árbol de relaciones, de modo que los cambios en una matriz intermedia modifican los sucesivos resultados matriciales que dependen de aquella.

El conjunto de funciones que el usuario puede utilizar está organizado por temas, siguiendo el desarrollo normal de un curso de Álgebra Lineal típico.

El profesor es quien tiene la responsabilidad de diseñar las situaciones didácticas más apropiadas para aprovechar las potencialidades de la tecnología de acuerdo a las dificultades y las necesidades de los estudiantes, Gómez, [2].

En cuanto a la metodología de uso de la Calculadora Matricial se puede plantear, y se plantea de hecho, mediante las tres posibilidades siguientes:

- El trabajo con toda la clase en las aulas de informática, con equipos estables y con prácticas guiadas o investigaciones y comprobaciones autónomas.
- El uso, con pizarra digital, en la clase ordinaria por parte del profesor o de los alumnos, para hacer patentes resultados y propiedades, mostrar tipos de funciones y realizar comprobaciones.
- El uso individual en clase o en el domicilio del alumno como herramienta de estudio, de comprobación y de repaso o refuerzo.

2.2 Utilidad en investigación.- La investigación hoy en día en el Álgebra Lineal no se concibe sin los ordenadores. Esta realidad nos permite al mismo tiempo admirarnos de los descubrimientos matemáticos realizados en otras épocas, donde no se contaba con calculadoras ni ordenadores. Gracias a ellos es más sencillo enunciar nuevos teoremas y demostrarlos ya que permiten encontrar de forma más sencilla contraejemplos. Al mismo tiempo, si un investigador tiene una idea y encuentra, gracias a la facilidad de los cálculos que realiza con un ordenador, un ejemplo que no se cumple abandona rápidamente la idea. Pero si en esa comprobación logra encontrar varios ejemplos que verifican lo que el investigador intuye que se cumple podrá buscar enunciar un teorema para esa idea.

En este sentido la Calculadora Matricial por sí misma no demuestra nada pero sirve al investigador para generar nuevos teoremas, ya que la visualización de las matrices que hace la Calculadora facilita su generación. Es esta la principal ventaja de la calculadora frente a MATLAB, pues aquella mejora el aspecto gráfico y visualiza las matrices de tal forma que es más fácil ver los resultados y guiar la intuición a la hora de plantear nuevas soluciones a determinados problemas. Por ello corroboramos a Moreno [5] que afirma que “la elección adecuada de nuestros medios de cálculo, evitando tareas innecesarias, puede simplificar el trabajo rutinario en beneficio del trabajo creador” (p. 354).

La Calculadora presenta además una buena adaptación a la terminología adecuada. Para trabajar con la Calculadora Matricial basta invocar en cada etapa relevante una sola función, con el nombre lo más cercano posible al problema que se trata de resolver, nombrando la entrada de datos y la salida de resultados con los nombres más adecuados.

Así por ejemplo: si el usuario desea obtener una base del subespacio propio de la matriz A, previamente construida, de valor propio lambda, previamente obtenido, basta con introducir en la aplicación la expresión

B=calcula_base_subespacio_propio(A, lambda)

de modo que la máquina devuelve, en las columnas de la matriz B, las columnas que forman la base deseada.

Si a lo anterior se añade la fácil visualización en pantalla de las matrices creadas y/o obtenidas, la sencillez de la interface de usuario, así como, la posibilidad de guardar y recuperar una sesión de trabajo cualquiera, se comprende la potencia de la Calculadora.

3. Características técnicas de la aplicación.- Como hemos indicado anteriormente la aplicación ha sido desarrollada utilizando el programa MATLAB. Su uso se ha extendido rápidamente entre científicos e ingenieros. La incorporación de este entorno a la enseñanza y formación de ingenieros es muy importante actualmente, Moreno [5].

4. Algunas funciones de uso en la Calculadora Matricial

1. *CD=calcula_inversas_por_la_derecha(A)*

Calcula las inversas por la derecha de A. Sólo hay inversas por la derecha si el rango de A es igual al número de filas de A. Si además A es cuadrada, hay una única inversa por la derecha que coincide con la inversa de A; en ese caso CD es la inversa de A. Si el número n de columnas de A es mayor que el número m de filas de A hay infinitas soluciones que son de la forma

$$R = [C\lambda^{(1)} + d_1 \quad C\lambda^{(2)} + d_2 \quad \dots \quad C\lambda^{(m)} + d_m]$$

siendo

$$D = [d_1 d_2 \dots d_m]$$

Nota: Es C una matriz de tamaño $n \times (n - m)$, D una matriz de tamaño $n \times m$ y las columnas $\lambda^{(j)}$ de $n - m$ parámetros independientes cada una. La matriz

$$CD = [C \quad D]$$

2. *Cd=resuelve_sistema_general(A, b)*

Se resuelve el sistema general compatible $Ax = b$, donde Aes una matriz de tamaño $m \times n$ y b la columna de términos independientes. El resultado es la matriz Cd. En caso de que la solución sea única, Cd es esa solución; si la solución es múltiple, entonces es de la forma $x = C\lambda + d$, con λ la columna de los parámetros del conjunto de soluciones, y Cd es la matriz particionada $[C \quad d]$

3. *B=calcula_base_subespacio_propio(A, lambda)*

Calcula una base del subespacio propio de A de valor propio *lambda.*

4. *P=calcula_proyector_ortogonal_sobre_imagen(A)*

Calcula la matriz P de proyección que transforma el vector x en su proyección ortogonal sobre R(A).

ISSN 2301-1092 • ISSN (en línea) 2301-1106

5. Un ejemplo ilustrativo.- Se pretende hallar la proyección del vector columna b sobre el subespacio generado por los vectores columnas u y v paralelamente a la dirección w, previo cálculo y uso de la correspondiente matriz de proyección P. Los datos numéricos son:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \text{ (Ver Fig. 1)}$$

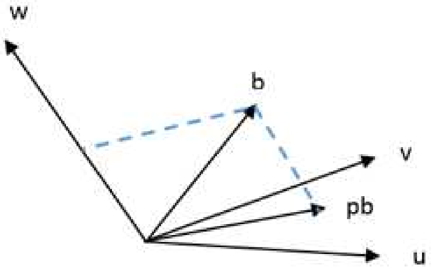

Figura I.- Representación simbólica.

Lo primero que se hace es crear las cuatro columnas $\mathrm{b}, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$ (ver Fig. 2)

b	u	v	w
1	1	1	-1
-2	2	0	1
3	3	1	2

Figura II.- Columnas creadas.

A continuación se construye la matriz A cuyas columnas son u y v (ver Fig. 3).

b	u	v	w	A	
1	1	1	-1	1	1
-2	2	0	1	2	0
3	3	1	2	3	1

Figura III.- Matriz A creada.

Se sigue estudiando el carácter lineal de las columnas u, v y w (ver Figura IV). La independencia lineal garantiza en este caso que el subespacio generado por w es complementario del subespacio imagen de A. El resultado $\mathrm{cl} = 1$ indica que los tres vectores forman una lista linealmente independiente.

b	u	v	w	A		cl
1	1	1	-1	1	1	1
-2	2	0	1	2	0	
3	3	1	2	3	1	

Figura IV.- Comprobación de independencia lineal.

Seguidamente se calcula la matriz de proyección (ver Figura V)

P		
0.5	-0.5	0.5
0.5	1.5	-0.5
1	1	0

Figura V.- Matriz P de proyección.

Ya solo queda multiplicar P por b para obtener la proyección pb pedida (ver Figura VI)

P			pb
0.5	-0.5	0.5	3
0.5	1.5	-0.5	-4
1	1	0	-1

Figura VI.- Vector pb proyectado.

Se puede verificar que P es una matriz de proyección $Q = P^2 = P$ (ver Figura VII)

P			pb	Q		
0.5	-0.5	0.5	3	0.5	-0.5	0.5
0.5	1.5	-0.5	-4	0.5	1.5	-0.5
1	1	0	-1	1	1	0

Figura VII.- La matriz P es de proyección.

También se puede comprobar que el vector pb realmente pertenece a la imagen de A (ver Figura VIII) pues los tres vectores u, v y pb forman una lista linealmente dependiente (el valor de cl1 es la unidad).

P			pb	Q			cl1
0.5	-0.5	0.5	3	0.5	-0.5	0.5	0
0.5	1.5	-0.5	-4	0.5	1.5	-0.5	
1	1	0	-1	1	1	0	

Figura VIII.- La columna pb pertenece a la imagen de A.

Finalmente la diferencia dif $=$ b $-$ pb es un vector proporcional a w (ver Figura IX)

P			pb	Q			cl1	dif
0.5	-0.5	0.5	3	0.5	-0.5	0.5	0	-2
0.5	1.5	-0.5	-4	0.5	1.5	-0.5		2
1	1	0	-1	1	1	0		4

Figura IX.- La columna b-pb es proporcional a la columna w.

6. La Calculadora Matricial versus Derive.- En cuanto a docencia, la utilización de programas informáticos es cada vez más común en el aula a todos los niveles. Existen programas para realizar cálculos muy variados, representar funciones o configuraciones geométricas. De hecho, en la actualidad se tienen programas, distintos de la Calculadora Matricial, que abordan la resolución de problemas numéricos del Álgebra Lineal, como puede ser el programa Derive.

Derive es una herramienta matemática muy completa de un potencial enorme, la cual posibilita un enfoque activo en el aprendizaje de los alumnos, Ortega, [6]. Hasta ahora el principal inconveniente del programa Derive ha sido su complicado aprendizaje y funcionamiento, que exige a los usuarios un tiempo importante para aprender las rutinas de uso; aunque a partir de las versiones 5 y 6, la presentación del programa, el acceso y puesta en acción de menús y herramientas matemáticas se han hecho más sencillas y atractivas. No obstante, Derive continúa exigiendo un aprendizaje guiado y poco intuitivo que hace necesario que el profesor enseñe a utilizar la herramienta informática, al mismo tiempo que muestra su utilidad didáctica y los resultados matemáticos perseguidos. Esto condiciona la metodología de uso del programa, y requiere de un trabajo previo del profesor para guiar el manejo técnico del programa independientemente de los contenidos matemáticos que se quieran trabajar.

Por ello pensamos que una ventaja comparativa de la Calculadora Matricial, en nuestra opinión y a diferencia de lo que sucede con otros programas, es que no requiere especiales conocimientos de programación: sólo los mínimos para introducir una matriz en el sistema, como se hace en MATLAB.

7. Discusión.- Desde el punto de vista motivacional la Calculadora Matricial es de un enorme interés para los alumnos. Mantiene su atención en clase, entre otras cosas, por la claridad y vistosidad de las imágenes de las matrices que van apareciendo en el proceso de cálculo. Está atento a la explicación del profesor y se sorprende de la inmediatez de los resultados que se van obteniendo. Les facilita además hacer la pregunta adecuada en el momento oportuno.

Por parte del profesor, gana tiempo en la explicación, enseña con total seguridad, le permite ir hacia atrás, volver al principio, recuperar la sesión, no necesita borrar ninguna pizarra, etc.

Un profesor de un curso superior a primero puede usar la Calculadora Matricial, entre muchos otros temas: en estimación de parámetros; en cómo afecta un determinado ruido a las frecuencias fundamentales; en la resolución de sistemas lineales procedentes de modelos lineales de procesos reales; en la determinación de qué ecuaciones son las más relevantes de un sistema lineal, desechando las que se consideren linealmente dependientes o pasando a una resolución por mínimos cuadrados.

En general, a un alumno la Calculadora Matricial le ayuda a la hora de resolver problemas numéricos concretos, ya sea propuestos por el profesor o que él mismo encuentra; al profesor le es de indudable ayuda en la preparación de nuevos ejercicios para las clases regulares y para los exámenes, aparte de la ayuda que le puede prestar en su propia investigación.

8. Conclusiones.- Abánades y otros [7] ya planteaban el posible impacto del software en el mundo matemático distinguiendo entre el ámbito docente e investigador. Hoy en día este impacto es una realidad. En lo que respecta a la docencia, somos conscientes de que la tecnología no es la solución al problema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Pero lo cierto es que instrumentos como la Calculadora Matricial permiten que el estudiante pueda realizar actividades de exploración en las que es posible manipular directamente los objetos matemáticos y sus relaciones. En estas situaciones es “el profesor quien tiene la responsabilidad de diseñar las situaciones didácticas más apropiadas para aprovechar las potencialidades de la tecnología de acuerdo a las dificultades y las necesidades de los estudiantes” Gómez, [2], p. 13.

En resumen, y para sintetizar los beneficios del uso de la Calculadora Matricial:

Se ha demostrado de utilidad en las clases docentes; en la preparación de ejercicios numéricos de Álgebra Lineal; en la verificación de resultados obtenidos por otros medios; en la investigación matemática a la hora de estudiar cómo cambian las propiedades de las matrices al variar sus elementos; en el análisis de las propiedades de las matrices que están en juego en los diferentes cálculos; en evitar perder tiempo rehaciendo los cálculos por modificaciones de los datos de partida (gracias a la jerarquía mantenida en el proceso de cálculo). En definitiva, pensamos que la Calculadora Matricial es una herramienta atrayente, de fácil manejo, para quienes ya conocen lo básico del mundo de MATLAB a nivel de cálculo matricial.

9. Referencias

[1] J. Flaquer, “Innovando con MATLAB en la enseñanza de las Matemáticas,” presentado en IX Jornadas de innovación pedagógica, Granada, 2009.

[2] P. Gómez, "Tecnología y educación matemática," Informática Educativa, vol. 10, no. 1, pp. 93-111, 1997.

[3] I. Moreno, “Posibilidades didácticas de la informática en educación,” en Educación y Sistema Educativo, A. Monclús, Coord. Madrid: Universidad Complutense, 2007, pp. 383–397.

[4] D. C. Lay, Algebra lineal y sus aplicaciones, 4ªed. México: Pearson, 2012.

[5] C. Moreno “MATLAB en el Cálculo Científico,” La Gaceta de la RSME, vol. 3, no. 2, pp. 351–361, 2000.

[6] P. Ortega, “La enseñanza del Álgebra lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico,” Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, 2004.

[7] M. A. Abánades, F. Botana, J. Escribano y L. F. Tabera, “Software matemático libre,” La Gaceta de la RSME, vol. 12, no. 2, pp. 325–346, 2009.